哲学の探求第 42 号 哲学若手研究者フォーラム 2015 年 4 月 (210-237)

原始再帰算術はなぜ特別なのか？

—テイト "Finitism" の検討—

鈴木 佑京

テイトは，1981 年の論文 "Finitism" において，原始再帰算術(以下，PRA)と呼ばれる形式的体系[1]に形式化されるような数学的推論[2]は，以下のような特権的な地位を持つと議論した．

T1）無限の総体（infinite totalities）に対する言及をしていない．
T2）自然数に関する数学的推論の最小部分に対応する．
T3）T2 の結果として,それを批判できるような別の立場が存在しない(不可疑である)．
T4）有限主義的な型（finitist type）[3]に内在的に含まれており（implicit）, また有限主義的な型に内在する推論のすべてである．

テイトの論文は三つの意味で重要である．第一に，数理論理学における結果の一部は，PRA で形式化できるような数学的推論のみによって導出されている．そのため，PRA が持つ特権的な地位を明らかにすることは，PRA で形式化できるような数理論理の結果が持つ意義を検討する上で重要である．第二に，主に証明論において，PRA は形式的体系として研究対象になっている．PRA で形式化できる推論が特権的な地位を持っているとすれば, それは PRA に関する研究の価値を明らかにしてくれるだろう. 最後に, テイトの議論は, いわゆる「有限の立場」がいかなるものなのか, そしてそれがどのような意義を持つものなのかを明らかにすることを目標としている．

数理論理学の歴史の起源において，ヒルベルトはいわゆる「ヒルベルト・プログラム」を提唱し，数学による数学の基礎づけを行おうとした．これは，「有限の立場」という極めて弱い数学を境界づけ, その中に全数学を証明論的に還元し

ようというプログラムであった．「有限の立場」は何らかの特権的地位を持っているとされ，その中に全数学を還元することで，その特権性を全数学に伝播させ，基礎を与えようとしたわけである．だが，「有限の立場」が正確にはいかなる数学的推論を含むのか，そしていかなる意味で特権性を持っているのかについては，ヒルベルトは明確には語っておらず，現在も数学の哲学における論争トピックの一つとなっている．

テイトの議論は，もし成功しているなら，この二つの課題——「有限の立場」の境界づけと, その特権性の説明——に答えるものとなっている [4]. まず, T1 によって， PRA が有限的な性格を持つものとして切りだされてくる．従って，PRA こそ「有限の立場」と呼ばれるにふさわしい. そして, PRA が T2 から T4 という性格を持つことが, 有限の立場の持つ特権性を説明してくれるわけである.

この論文は，テイトの四つの主張のうち，T2 と T3 を対象として論ずる．テイトは論文 “Finitism” の中では，主に T1 と T4 に対する議論に集中しており，T2 と T3 にはっきりと対応する部分は極めて断片的なリマークでしかない．以下は，対応するリマークのうち私に見つけられるもののすべてである．

> よく知られているように，数学を有限の立場に基礎づけようとする試みは決定的に失敗する．だがどちらにせよ，有限の立場によっても他の種類の数学的推論によっても, 絶対的な安全性 [security] を実現することはできない．むしろ，有限の立場の特別な役割は，以下のような事情に存している．つまり有限の立場は，数に関するあらゆるノントリビアルな数学的推論によって前提される，最小の [minimal kind of] 推論である．そしてそれゆえに，有限の立場を批判するために立つことができるような，有限の立場以上に好ましい立場が存在しないというデカルト的な意味で，有限の立場は不可疑である．（p. 525，引用者訳．[]部は原語を示した．以下の引用はすべて同様）

つまり，任意の数に関するノントリビアルな数学的推論は有限主義的方法を前提するので，そこから有限主義の批判を行うことができるような有限主義以上に好ましい立場は存在しえない．換言すれば，それを疑うこと

は端的に意味がない [senseless].（p. 546）

従って，少なくとも論文 “Finitism” の中には，T2 や T3 を擁護するための議論がクリアカットな形で含まれているとはいえないだろう．またそもそも，T2 や T3 の主張(「有限の立場は，数に関するあらゆるノントリビアルな数学的推論によって前提される，最小の (minimal kind of) 推論である」「有限の立場を批判するために立つことができるような，有限の立場以上に好ましい立場が存在しないというデカルト的な意味で，有限の立場は不可疑である」)が，正確には何を主張しているのか，それほど明らかではない．だが，少なくとも T3 は，PRA の認識論的特権性を直接的に主張しており，先ほど述べた三つの観点からいって大変重要な意味を持つ主張であるように思えるし，それと同程度に，T3 の根拠である T2 も重要であるように思える．

故にこの論文は以下の二つの課題を遂行する．第一に，テイトの論文に含まれる要素をもとに，T2 や T3 の主張内容と，それを擁護するアーギュメントを再構成する．特に，以下の疑問に答えることを目標とする．

- T2 にあたる主張の中に登場する,「前提する」ということは何を意味しているのか.
- T2 と T3 はなぜ成り立つのか(どのようなアーギュメントが提供されるのか).

この疑問に解答することを通して，テイトの議論の評価を容易にすること，最終的には「有限の立場」ないし PRA の特権性についての理解を促進させることを目指す.

具体的には，テイトの “Finitism” に言及した先行研究のうち T2 と T3 に焦点を当てたものとしてザックの研究を取り上げ，上の疑問に十分に答えるものではないことを確認する．その後，我々なりの再構成を提示する．この再構成においては，PRA が数概念に対して分析的といってよいような地位を持つことが鍵となる．なおテイトの論文に含まれるリマークの断片的な性格，そしてそれ以上に私の力不足から，ここでなされた再構成がテイト自身の意思に添ってい

ない可能性は十分ある．だが，少なくとも議論としてそれ自身意味のある再構成をすることはできていると信ずる．

第二に，再構成された議論を評価する．まず，テイトの論文に対する批判のうち, T2 と T3 に焦点を当てたものとして, デトレフセンの研究を取り上げる．デトレフセンの批判は決定的な力を持つものではない．その後，私からテイトの議論に対する批判を行う．

1 先行研究・ザック

ザックは，彼の博士論文 *Hilbert's Finitism* において，有限の立場の認識論的な特権性を明らかにする議論の一例として，テイトに言及している（pp. 141-146）．ザックは，証明論的還元プログラムとしてのヒルベルトプログラムが意味を持つためには，有限の立場が認識論的な特権性を持つ必要があるとする（これは私が冒頭で述べたのと同じ論点である）．そして，その特権性を明らかにする可能性があるのが，テイトの議論だというわけである．

ザックは，テイトの議論を一旦再構成した上で批判している．ここでは再構成の部分のみを扱う．

Z1）ザックによればテイトは，PRA がノントリビアルな数学的推論（以下、一部で「ノントリビアルな推論」と略する）によって前提される，最小の推論であると論じている．ここから PRA が認識論的に特権的であることは次のように出てくる（とザックは述べる）．まずテイトがいうことが正しければ，どのような認識論を前提としたとしても，何らかの数学的知識が持っている認識論的な良さは，PRA によっても保持されている．これに加えて，もしも数学のある領域が他の領域よりもより安全であることを受け入れれば，PRA が認識論的に特権的であることが出てくる．

Z2）問題は，PRA が果たして任意のノントリビアルな数学的推論によって前提される推論であるかどうかである．ここでテイトは困難につきあたるとザックはいう．なぜなら，「原始再帰的な推論の全力を使うことなくいくつかのノントリビアルな結果を得ることが可能」（p. 143）だからだ．

「原始再帰的な推論の全力を使うことなくいくつかのノントリビアルな結果を得ることが可能」といういい方でザックが念頭においていると思われるのは次のことであろう．PRA の推論によって証明される結果の一つ一つを見てみれば，PRA において使われる原始再帰的な原理——量化子のない式への数学的帰納法と，原始再帰的な関数構成——の有限個の例化だけを使っている．従って，PRA からあるノントリビアルな結果を証明したとしても，それは常に原始再帰的な原理のごく一部（有限部分）だけを使っており，その全域を使っているわけではない．

原始再帰的な推論の全力を使うことなくノントリビアルな結果を得ることが可能であるにもかかわらず，PRA が任意のノントリビアルな数学的推論によって前提されることはいかにして可能なのか．ザックは，それが可能であるためには，ある原理を，実際に使うことなく前提することが可能でなければならないという．

> しかし，ある構成や原理を，実際にそれを使うことなく前提する，ということがあるかもしれない．従って，たとえあらゆる数の総体や，あるいは原始再帰的定義という一般的原理に全く訴えていないノントリビアルな結果があるとしても，その結果が実際に訴えているところの，数の存在や，原理の妥当性は，自然数列の全体の存在や原始再帰的な方法一般の妥当性によってのみ正当化される．（p. 143）

テイトの主張が正しいためには，このような「前提する」仕方がなければならないというのである．

Z3）そしてザックは，ある場合においては，このような仕方での「前提する」ことがありうるというアーギュメントを提供する．彼は次のような思考実験を提案する．もし，あらゆる数の総体に訴えず，一部の数——例えば 10 の 10 乗未満に収まるような数——についてだけ訴えるような結果を証明している数学者に対し，10 の 10 乗は数かどうか，と聞いたとする．もし彼がこれを否定したなら，彼はある大きさ（10 の 10 乗未満）を持つ有限列を研究しているとはいえても，自然数を研究しているとはいえないだろう．もし彼の証明や定理が自

然数列の有限部分に言及しているようにみえても，実はそれは自然数に対する言及ではなく，自然数列の有限部分と同じ構造を持つ別のものに対する言及にすぎない．この意味で，彼が自然数(の一部)について研究しているとするならば，自然数列の総体に直接訴えることなく，自然数列の総体の存在を前提している（p. 143）．

Z4）だがザックは，PRA の全体がこれと同様に前提されていることは説得力がないと論じる．原始再帰関数よりも小さな関数のクラスに対して定義の図式を与えたり, あるいは PRA の部分体系であるがしかしノントリビアルな結果を示すことができる部分体系が定式化されているからである（p. 143）．

原始再帰関数よりも小さな関数のクラスに対して定義の図式を与えることができること, あるいは PRA の部分体系であるがしかしノントリビアルな結果を示すことができる部分体系を定式化できることが, なぜ PRA が前提されていることの説得力を奪うのかは一見明らかではないが，ザックが考えているのは次のようなことだろう．個々の結果が PRA の全域を使わずに得られたとしても，それらの結果をいくつか集めてきた時，それらを綺麗に体系化してくれるような原理のうちもっとも弱いものが原始再帰的な関数定義や推論の図式だけだったとしたならば，そのノントリビアルな結果のどの一つをとってもそうした図式全体の妥当性を前提しているということはそれなりにもっともらしい. だが, PRA の一部だけを使って出せるいくつかのノントリビアルな結果が原始再帰的な原理よりも弱い図式によって体系化できたとしたならば，これは成り立たない. 従って, この弱い図式の妥当性が前提されることはあるかもしれないが, PRA が前提されているということの説得力は減ぜられる．ではテイトの主張は誤っているのか？

ここでザックは, 有限の立場における関数, 及び有限の立場における証明は, 有限主義的な型に内在的な構成によって閉じていなければならない, という（テイトは，有限主義的な型に内在的な構成は，無限の総体への言及なしに理解できると論じている（pp. 529-530）．これが，有限の立場が有限主義的な型に内在的な構成で閉じていることを含意していると考えるのはそれほど奇異ではない）．そして，原始再帰関数と PRA は有限主義的な型に内在的な構成で閉じており（T4 として述べておいたように，テイトは，PRA の推論が有限主義的な型

に内在する推論とぴったり対応すると考えている．これに加えて，有限主義的な型に内在する推論から，有限主義的な型に内在する構成によって得られる推論が，常に有限主義的な型に内在することを受け入れれば，PRA は有限主義的な型に内在的な構成で閉じているはずである．従ってザックがテイトに帰するこの主張は，自然な前提のもとでテイトの T4 と符合する），対して，先ほど述べた原始再帰関数の部分クラスや，PRA の部分体系は，この条件を満たしていないという．かくして，有限の立場は，PRA に対応するというわけである．

> 私が思うに，この考察が示すことは，テイトの，有限主義的推論が“数に関するあらゆるノントリビアルな数学的推論によって前提される，最小の推論”であるという主張は，定義ではなく，分析の結果であるということである．そしてこの分析は，有限主義的関数（そして，その拡大によって得られる，有限主義的な推論原理）として境界づけられるどのようなクラスも，“最小”で“ノントリビアル”なだけではなく，数の概念に内在的なすべての構成のもとで閉じていなければならない，ということを前提する．この条件だけが，原始再帰よりも弱い構成のもとで閉じているような，対抗するクラスを除外することができる．（p. 145）

以上のザックの再構成についてコメントを述べよう．

まず Z1 は，特に問題はないように思える．

問題は Z2 と Z3 と Z4 である．まず Z2 の方は，テイトのいう「前提する」ことが何を意味しているのかについて，非常に重要な指摘をしている．つまり，「前提する」ことが何を意味するにせよ，テイトの議論が成立するためには，ある構成や原理を，実際にそれを使うことなく前提する，ということが可能でなければならない．これは，「前提する」ことが何を意味するかを考える上で極めて強力な制限として働く．

次に Z3 だが，これも我々の目標からすると重要な部分である．なぜなら，これは，Z2 で指摘された制限をクリアするような形で「前提する」の意味を理解する仕方を示唆するとともに，あるケースにおいてその「前提する」ことが成り立つことに思考実験によるアーギュメントを与えているとみなせるからである．

まず Z3 において明らかにザックは，次のような条件を受け入れている．

(P) 数学的主張 A が数学的主張 B を前提している
　if. A を受け入れているものは，B に関する態度決定を求められた場合，否認しない．

そしてザックは，この条件をもとに，10 の 10 乗の存在に直接訴えずに導ける定理(あるいは，10 の 10 乗に訴えない証明が，問題の定理を示している，という主張)が，自然数列における 10 の 10 乗の存在を前提している，ということを，思考実験によって示そうとしている．つまり，思考実験によってこの条件の前件（if 以下の部分)の対偶——B に対する態度決定を求められて否認するならば，A を受け入れていない——を示し，それをもとに，ある原理に直接訴えずに前提するということが，このケースで成立していることを主張している．

ここで，P を次の P+ のように強めれば，これは「前提している」という関係を解明しているものとみなせる．

(P+) 数学的主張 A が数学的主張 B を前提している
　iff. A を受け入れているものは，B に関する態度決定を求められた場合，否認しない．

従って，ザックは，P+ によって，Z2 による制限をクリアしうる仕方で前提関係を解明するとともに，この解釈に基いて，ある例に関して実際に前提関係が成り立つことのアーギュメントを提供した．これは，前提関係の解明と，PRA と任意のノントリビアルな推論の間の前提関係を示すアーギュメントの再構成とを求めている我々の目標を一部満たすものである．

だが，少なくともこの部分には，PRA と任意のノントリビアルな推論の間に前提関係を示すアーギュメントそのものが含まれているわけではない．あくまで，10 の 10 乗に訴えない結果が，10 の 10 乗を前提することがありうるといっているだけである．そして Z4 に書かれているように，ザック自身も，思考実験によるアーギュメントを PRA 全体に拡大することはできないと考えている．

そこでザックは，Z4 において，有限主義的な型の概念に内在的な構成で閉じているかどうか，という新たな基準を持ち出す．この新たな基準を満たすのはもっぱら PRA だけであり，そのことが Z3 で逢着した困難を解決するとされている．

ここで以下のことに注意すべきである．我々とザックがもともと抱えていた問題はあくまで，PRA が任意のノントリビアルな推論に前提されているのかどうかであり，PRA が有限主義的な型の概念に内在的な構成で閉じているかどうかは，直接的な関心ではない．だから，後者の問題が前者の問題の解決と適切に関係していなければならない．だが，「概念に内在すること」と，「前提されること」との間の関係は明確でない．さらにそもそも，両者の問題はその方向において正反対であるように思える．PRA が任意のノントリビアルな推論に前提されているためには，推論のクラスとしての PRA は，適切なだけ小さくなければならない．対して，PRA が有限主義的な型の概念に内在的な構成で閉じているためには，PRA は，適切なだけ大きくなければならない．従って，Z4 の議論がもともとの問題の解決にいかなる意味を持つのかは判然としない．

だが，次のように考えることができる．ザックは，有限主義的な型に内在する推論である，という基準と，任意のノントリビアルな推論に前提されている，という基準の間に，何らかの関係を想定しているはずである．例えば，前者を満たすことが後者を満たすことの必要十分条件になっている，というような関係を．だとすれば，任意のノントリビアルな推論に前提されているような推論全体のクラスは，有限主義的な型に内在的な構成について閉じている，といえそうである．というのも，この場合，任意のノントリビアルな推論に前提されているような推論全体のクラスは，有限主義的な型に内在的な推論全体のクラスとぴったり一致するはずだが，すでに指摘したように，後者のクラスは，有限主義的な型に内在する構成で閉じていると考えるのが自然である．この視点から見た時，PRA は適切なだけ大きい．ザックが引用部で述べようとしているのはこういうことだろう．

ここで，PRA が適切なだけ小さいのかという問題に戻ると，「前提されること」と「概念に内在すること」にこのような関係があるのであれば，PRA が有限主義的な型に内在的であるということ（T4 の前半）から，PRA が任意のノント

リビアルな推論に前提されているという, Z3 の段階ではまだ疑わしく見えた結論を，理論的に擁護する道を手に入れることができる．ザックはここまで示唆していたと考えることもできる．

もしザックが考えていたことがこのようなことだとすれば，我々の目標から見て非常に興味深い．まず，彼の議論は、冒頭に述べた四つの主張のうち，T4 の主張とそれに対するアーギュメントが, T2 に対するアーギュメントの一部をなしている，という，T2 のアーギュメントの大きな構造を示唆している．さらに，彼の議論は、「前提すること」と,「概念に内在すること」の間に，ザックが示したような類の適切な関係があるとすれば，PRA の全域に訴えていない推論が，にもかかわらず PRA の全域を前提するという一見不可思議なことに，説明がつくという可能性を指摘してもいる．

しかしながら，例えば「内在すること」とはどういうことなのか，両者の適切な関係はどういうわけで成立するのか，こういったことについて，明確な説明が提供されているとはいえない．従って，テイトのアーギュメントを適切に評価できるだけの内容を持った再構成がなされているとはまだいえないだろう．

2 再構成の前提

それでは以下で，我々の目標に適うような形で，T2 と T3 についてのテイトの議論の再構成を行う．だが，その前に，一つ前提しておきたいことがある．我々は，テイトの T2 の主張を，実質的には二つの事柄を含んでいるものとして解釈する．つまり，

(T2-1) PRA は, 自然数に関する任意のノントリビアルな数学的推論に前提されている．

(T2-2) PRA を超えるいかなる数学的推論についても, 自然数に関する任意のノントリビアルな数学的推論に前提されている，ということはない．

対応して，T3 の主張も，次の二つの事柄を含んでいるものと解釈する．

（T3-1）PRA は不可疑である.

（T3-2）PRA を超えるいかなる数学的推論も不可疑ではない.

例えばデトレフセンは, もっぱら T2-1 や T3-1 の側面にのみ焦点を合わせ, T2-2 や T3-2 は無視しているように見える．ザックやテイト自身も，PRA を超える数学的推論が有限主義的といえるかどうかということはしばしば話題にするものの，PRA を超える推論が不可避か，あるいは不可疑か，ということは直接話題にはしていない．だとすれば，T2-2 や T3-2 をテイトに帰するのは，彼の議論の今までの受け取られ方，あるいは彼自身の意思に反する可能性がないではない.

にもかかわらず私が T2-2 と T3-2 をテイトに帰するのは，これらを帰することによって，テイトの主張が飛躍的に興味深さを増すからである．本論文の冒頭において，証明論的な結果の価値を査定する際，テイトの主張が役に立つ可能性を示唆しておいた. だが, 証明論の結果の価値を哲学的に検討する際には, ふつう，PRA が何らかの特権的な地位を持つこと自体は前提されている．しばしば問題になるのは，PRA を超える原理が，PRA と同様の地位を持つのかということである．従って，PRA を超える原理の地位についてのコミットがなされている方が，なされていない場合よりも，テイトの主張の興味深さは遥かに増す. 加えて, テイトが PRA を超える原理を有限主義的と認めることを強硬に批判していることを考えれば, 彼が PRA を超える原理が不可避であるとか不可疑であると考えていたとは考えにくい．従って，T2-2 と T3-2 を彼に帰することを私は選択する.

3 再構成

では, 主張とアーギュメントの再構成に移ることにしよう. まず,「前提する」ということの解釈については, ザックが Z2 で課した制限を満たすために, 我々はザック自身が提案した（と解釈できる）P+ の図式に沿って考えることにする. さらに，T2-1 を支持するアーギュメントの再構成において，ザックが Z4 で提案した（とみなせる）路線―― T4 を梃子として使う路線――を踏襲することに

する．すると問題になるのは,「内在すること」の意味と,「前提する」ことと「内在すること」の間の適切な関係づけである．ザックの議論のこの穴を埋めることが，我々の課題になる．

だが我々は，この課題に直接取り組むのではなく，まず一度視野を広げて，議論全体の構造がどのようなものになるのかに目を向けたい．その過程の中で，問題の穴は自然に埋まる．そして，広い視野のもとでの考察のヒントとなるのが，次に紹介するような数学外の事例である．

人間はみな死ぬのであれば，独身男はみな死ぬ，という仮言的な主張を受け入れている人がいるとしよう．この主張は,独身男は人間であるという主張と，簡単な論理的推論によって導くことができる．つまり，独身男は結婚していないということに全く訴えることなく,この主張は正当化できる．しかしながら，もし，人間はみな死ぬのであれば，独身男はみな死ぬ，という主張を受け入れている人が，にもかかわらず，独身男は結婚しているかどうかに関する態度決定を求められて，結婚していると答えたり，あるいは判定を保留したりするならば，そもそも彼は独身男という概念を理解しておらず，従って独身男はみな死ぬ，という主張も，人間はみな死ぬのであれば，独身男はみな死ぬ，という主張も，そもそも理解することができない．従って，受け入れることもできない．つまり彼はそもそも，人間はみな死ぬのであれば，独身男はみな死ぬ，という主張を受け入れてなどいなかったということになる．逆にいえば，もし，人間はみな死ぬのであれば，独身男はみな死ぬ，という主張を受け入れている人は，必ず，独身男は結婚しているかどうかに関する態度決定を求められた場合，結婚していないことを肯定する．

このケースでは次のことがいえる．まず，P+ に従えば，人間はみな死ぬのであれば，独身男はみな死ぬ，という主張は，独身男は結婚していない，という主張を，それに直接訴えずに前提している．従って，これはザックの課した制限をクリアしているケースである．次にこの例は，独身男は結婚していないという主張を受け入れることが，独身男という概念の理解を構成しているケースである．つまり伝統的な言葉遣いでいえば，独身男は結婚していないということは，独身男の概念に内在するものを取り出すだけで導けるような，分析的な真理である．最後に，その分析的な性格から，独身男は結婚していないという

主張は，任意の独身男に関する主張において P+ の意味で前提されていると考えられる．なぜなら，任意の独身男に関する主張を受け入れるものは，独身男の概念を理解していなければならないだろうが，しかし，独身男の概念を理解しているものは，独身男は結婚していないということを受け入れなければならないからである．

我々が提案したいのは，この独身男のケースをモデルとして，テイトの議論を再構成することである．つまりテイトの議論は，PRA に属する主張は自然数概念の理解を構成するような分析的な主張であることをいっているものとみなせるのではないか，ということである．これは一見突飛な解釈に見える．というのも，この解釈によれば，テイトの主張はあまりに法外なものであるように思えるからである．体系としての PRA は，例えばロビンソン算術の無矛盾性のような，自然数論を理解するもののすべてが即座に同意するものとはいえない定理を多数証明できる．こうした結果が自然数概念の理解を構成しているとはとてもいえないのではないか.

だがしかし，テイトの論文を注意深く見ていけば，この印象は霧消するだろう．まずテイトが PRA に属するものとして挙げている数学的主張は常に，タイプ理論において判断（judgement）と呼ばれるものの形式をしている．つまり, t:A, 数学的構成 t はタイプ A である，という主張である．従って，例えばロビンソン算術の無矛盾性は,「証明 t は，ロビンソン算術は無矛盾であることの証明である」，というような主張として，PRA の中に含まれている．PRA は，定理そのものでなく，ある証明がある定理の証明である，という形式の主張の集まりなのである．このように，証明も主張の一部として含めれば，定理そのものよりも遥かに容易に同意される主張になるだろう．従って, PRA に属する主張が、概念の理解を構成するような地位を持つとするのは，それほど奇異ではない [5].

次に，テイト自身の論述を見てみると，彼自身が，PRA が数概念の理解を構成するものであると考えているのはほとんど明らかであると思われる．彼は，冒頭で主張 T4 として要約したように，有限主義的な型の中に PRA に属する証明構成が内在するとしている．その上で，それを根拠に，こうした構成を拒否しつつ，有限主義的な型の概念を理解することは不可能であるとしている（p. 546）．従って，テイトは，PRA が有限主義的な型に内在するということを，PRA

が有限主義的な型から分析的に導かれるものであることとほぼ同じこととして捉えているように思われる．そして彼が，有限主義的な型として数概念を分析していることを考えあわせれば (pp. 529-531)，ここで述べた解釈は彼の論述とかなり適合していることがわかるだろう．

そこで，「独身男」のモデルに沿って，テイトの議論と主張を再構成してみよう．まず PRA を，先ほど述べたタイプ理論的な形式を持つ主張の集合として捉える．そして，最終的な目標となる主張，T2-1 と T2-2 を，次の四つの主張群として解釈する．

(T2-a) 自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と, PRA に属する任意の主張 F について, C を受け入れるものは, F を理解している．
(T2-b) 自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と，PRA に属する任意の 主張 F について，C を受け入れるものは，態度決定を求められた場合，F を受け入れる．
(T2-c) 自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と, PRA に属する任意の 主張 F について，C を受け入れるものは，F を受け入れることを正当化されている．
(T2-d) T2-a 〜 T2-c で述べられた条件を満たすような数学的主張の集合は, PRA に必ず包含される．

T2-a 〜 T2-c が T2-1 を，T2-d が T2-2 を明確化したものである．「独身男」のケースにおいて，T2-a 〜 T2-d が成り立つことを確認しておいて欲しい．その上で，まず，T2-a 〜 T2-c に対するアーギュメントを次のように再構成する．

1. 自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C について，C を受け入れるものは，C を理解している．
2. 自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C について，C を理解するものは，自然数概念を理解している．
3. 自然数概念の理解は有限主義的な型の理解として分析される．
4. PRA に属する任意の主張 F について，有限主義的な型を理解するものは,

F を理解する．

5. PRA に属する任意の主張 F について，有限主義的な型を理解するものは，態度決定を求められた場合，F を受け入れる．
6. PRA に属する任意の主張 F について，有限主義的な型を理解するものは，F を受け入れることを正当化されている．
7. 1, 2, 3, 4 より, 自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と，PRA に属する任意の主張 F について，C を受け入れるものは，F を理解している．（T2-a）
8. 1, 2, 3, 5 より，自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と，PRA に属する任意の主張 F について，C を受け入れるものは，態度決定を求められた場合，F を受け入れている．（T2-b）
9. 1, 2, 3, 6 より，自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と，PRA に属する任意の主張 F について，C を受け入れるものは，F を受け入れることを正当化されている．（T2-c）

1, 2 は実質的な議論なしに受け入れてもよいと思われる．3, 4, 5, 6 は，テイト自身が論文の中でアーギュメントを提供していると捉えられる．3 に関しては，テイトは，彼自身の分析を提示し，それをモチベートした後 (p. 529)，数の概念を分析する他の試み――ヒルベルト，フレーゲ，デデキントによる試み――を批判するという形で論じている (pp. 538-542)．4, 5, 6 については，既に指摘したように，テイトが，PRA が有限主義的な型に内在するというのは，この 4, 5, 6 を意味していると考えられる．従って，テイトが T4 (の前半) に対して論文中で提供したアーギュメント――有限主義的な型の本質として「反復」の概念を取り出し，ここから原始再帰的原理を正当化するもの (pp. 531-538)――は，そのまま，4, 5, 6 を支持するアーギュメントと考えることができるだろう．従って，ここで再構成された T2-a ～ T2-c に対するアーギュメントは，テイトの論文から大きく離れた考察を導入しなくても，一定の説得力を持つものであると考えられる．

以上で再構成された T2-a ～ T2-c とそのアーギュメントについてコメントを三つ述べておく．

A1）4, 5, 6 を T4 に相当するものとみなしてよいのであれば，この再構成されたアーギュメントは，「内在すること」の意味を 4, 5, 6 として明らかにするとともに，「内在すること」と「前提すること」の関連を，1, 2, 3 によって説明している．つまり，この節の冒頭で述べた問題を解決している[6].

A2）テイトは，t:A，「t が A を証明している」，という主張それ自体に証明が必要とされるのではないか，という問題を提起した上で，それに対して，t それ自体が t:A の証明になるとすれば，その問題は生じない，としている (p. 528)．テイトによれば，ある構成が A の証明であるということは，その構成がある仕方で構成されているということであり，従って構成そのものから読み取ることができる．従って，t が A を証明していることには，t そのものが証明を与えているというのである．

もしもテイトがいうことが正しいとすると, t:A を理解しているものは t を理解し, つまり t がいかに構成されているかを理解し, そして A を理解している，つまりある構成が A であるためにはいかに構成されていなければいけないかを理解している．だとすれば，この理解だけをもって t:A を受け入れることを正当化されている (6) と考えることは極めて自然であろう．従ってここでなされた再構成は，テイトの論述と適合しているものであるといえるだろう．

A3）T2-a 〜 T2-c は，PRA に属する任意の主張が前提されている，といっているだけで，PRA が全域的に妥当である，という主張が前提されている，といっているわけではない．これは，テイトの主張と符合する (pp. 545-546)．

さて次に, T2-d を導くアーギュメントを再構成しよう. これは T2-a 〜 T2-c のためのアーギュメントと異なり, 線形の議論にはなっていない. T2-a 〜 T2-c を導くアーギュメントを一旦認めた上で, にも関わらず T2-d が成立しなくなってしまうような状況を考え，その可能性を潰すという形になっている．

まず次のことに注意しよう．T2-a 〜 T2-c を導くアーギュメントは，大きくいえば次のような構造になっている．ノントリビアルな数学的推論を受け入れている人の持っている概念的リソースの共通部分（以降，これを，MCR と略する）の中に，数の概念が含まれている．そしてこの数の概念は，PRA に基礎を与える，という具合である．

従って，少なくとも，次のような状況が起こっている場合，T2-d は成り立た

なくなる．それは，MCR に含まれる概念リソースが PRA に収まらない数学的推論に基礎を与えてしまうような場合である．T2-d を導くアーギュメントは，この可能性を潰すことを目指す．

この可能性は更に二つの可能性に分けられる．一つは，MCR の中に数の概念とは異なる概念リソースがあり，それが PRA に収まらない数学的主張に，PRA と同じような仕方で基礎を与えてしまう（つまり T2-a 〜 T2-c にあたる地位を与えてしまう）場合である．こちらのケースはテイト自身はほとんど考慮していないが，確かにこのような場合は考えにくい[7]．数の概念の把握と関係ないような概念的リソースであって，数に関わるいかなる推論を理解するためにも必要なリソースとは一体何だろうか．そのリソースが数学的主張に基礎を与える以上，そのリソースも数学的な性格を持つであろう．数学的主張に基礎を与える概念リソースとしては例えば幾何学的な概念や，累積的集合の概念，述語の外延の概念などが候補に挙げられるかもしれない．だが，もしもこれらが自然数概念の理解と切り離せるものだとすれば[8]，例えば PRA で定式化されるような主張の理解にこうした概念は必要ないだろう．

もう一つの場合は, 数の概念が PRA を超える数学的主張に基礎を与えてしまうような場合である．T2-a 〜 T2-c を導くアーギュメントは今前提されているので，これは，有限主義的な型の概念が PRA を超える原則を正当化してしまうような場合にあたる．テイトはこの可能性については明示的に議論を与えており，原始再帰関数でない関数や，PRA に収まらない証明について，実際に幾つか例を構成してみせ，それぞれが有限主義的な型の概念に内在的とはいえないことを議論することで，この可能性を潰そうとしている（pp. 533-534, pp. 537-538）（これは冒頭で述べた T4 の後半部分にあたる）．

以上で，冒頭に掲げた T2 の主張に対応する，T2-a 〜 T2-d を導くアーギュメントの再構成を終えた．最後に，T3-1，T3-2 を導くアーギュメントを示しておこう．

1. PRA に属する任意の主張 F について，F を批判する主張もまた，数に関するノントリビアルな数学的主張である．
2. 自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と, PRA に属する

任意の主張 F について，C を受け入れるものは，F を受け入れていることを正当化されている．

3. 1, 2 より，PRA に属する任意の主張 F について，F を批判する主張を受け入れるものは，F を受け入れることを正当化されている．
4. 任意の数学的主張 C について，C を受け入れることを正当化されているにも関わらず，C を批判する主張を受け入れるものは，不整合である．
5. 3, 4 より， PRA に属する任意の主張 F について，F を批判する主張を受け入れるものは，不整合を犯している．（T3-1）

5 が結論である不可疑性 T3-1 にあたる．

2 は T2-c である．4 は，一般的に受け入れられる前提であると考えられる．従ってどちらも，テイトの議論から大きく逸脱することなく擁護できる前提である．故に，この再構成はある程度妥当であると考えられる．

T3-2 に対するアーギュメントとしては，T2-d が持ち出せる．つまり，T2-d によれば，T2-c のような地位を持つ数学的推論の体系は PRA だけであり，それを超えたいかなる数学的推論も同様の地位を持つことはない．従って，少なくとも，T2-c を梃子にするような上記の形のアーギュメントを，PRA を超えた数学的推論に対して当てはめることはできない．もちろん，T2-c のような主張を持ち出さずに不可疑性を主張する道を完全に閉ざすこともできないが, しかし, 不可疑性を主張しうる可能性の主要なものが潰されることは間違いがなく，T3-2 に対する動機づけとしては十分だろう．

以上で，冒頭に掲げた T2, T3 の主張に至る議論の再構成を終えた．我々の目標に照らした時，「前提する」ことの意味や，T2, T3 を導くアーギュメントの構造について，もとのテイトの記述や，先行研究よりもより明確なものを提示できたと信ずる．また，この再構成が，テイトの議論からそれほど逸脱していないこと，そして，再構成された議論それ自体の説得力もそれなりにあることを示せただろう．

4 デトレフセンの批判

ここからは，前節でなされた再構成をもとに，テイトの議論を評価する．特に，T2-a 〜 T2-d を導出するアーギュメントに集中する．さらに，その中でも，T2-a 〜 T2-c を導くアーギュメントの 四つめの主張，PRA に属する任意の主張 F について，有限主義的な型を理解するものは，F を理解する，ということは前提する．この主張が疑問の余地なく正しいというわけではない．例えば，ザックが，先ほど取り上げた論文の中で提起している，有限主義的な型の概念にアッカーマン関数が内在しているかどうかという議論などは十分検討する価値があるし，また私自身もこれとは異なる観点から反論を持っている[9]．だが，紙幅の関係上，この論文では無視するというだけである．

まずデトレフセンによるテイトの批判を確認し，それがテイトに対して決定的な打撃を与えているものではないことを確認した後，我々から別の反論を提起する．

デトレフセンは，著書 *Hilbert's Program* において，テイトの議論に対する批判を与えている（pp. 69-71）．彼によれば，テイトの議論が目標を果たし，有限主義＝ PRA の不可避性（任意のノントリビアルな推論に前提されていること）からその不可疑性を示すためには，有限主義的明証性が，その認識論的な安全性において一様である，という前提が不可欠である．というのも，もしも有限主義的明証性が一様でなく, ある部分が他の部分よりもより安全であるのなら，そこを基礎として安全性の低い部分に対応する推論を批判することができることになる．だが，これでは有限の立場の全体が不可疑であるとはいえない．

彼の批判はこの前提を攻撃する．彼によれば，厳格有限主義，ベルナイス，クライゼルなどが，有限主義的な議論の安全性が一様ではないことに気付いていたという．有限主義的な議論であっても，その議論が長くなり，より複雑になっていけば行くほど，安全性は反比例して下がっていく．従って，短く単純な有限主義的議論は，長く複雑な有限主義的議論に比べて，安全性において勝っている．これは，有限主義的な明証性が，安全性において一様でないことを表している, つまりテイトの議論の誤りを表している, ということではないか.

デトレフセンは認識論的な一様性を，不可避性から不可疑性を導く中間ステップに必要であるとしている．だが，我々の定式化では，不可避性から不可疑性を導くアーギュメントにこれにあたるステップは必要ない．むしろデトレフ

センのいう認識論的な一様性は，不可避性を導くアーギュメントのうちの，4 〜 6 に対応している．4 〜 6 は，任意の有限主義的な主張について，その主張がいかに長く複雑であろうとも，有限主義的な型を（従って 3 を前提すれば自然数概念を）理解するものは，それを理解し，受け入れることを正当化され，また受け入れる，としている．これに対してデトレフセンは，証明が長く複雑になっていけば行くほど，それを理解することは困難になり，結果として受け入れることも，受け入れることを正当化されることも難しくなることを指摘しているとみなせるだろう．従って，証明が極端に長く複雑になった場合，たとえ自然数概念を理解していたとしても，我々はそれを理解できないし，受け入れることもない．理解できない主張を正当化されることはないから，受け入れることを正当化されることもないだろう．このようにして，デトレフセンの批判は，我々が再構成したテイトの議論にあてはまる．

ここでテイト側が可能な再反論は，何らかの仕方で認識能力の“理想化”を導入することしかないと思われる．まず一つの仕方は，もし我々の認識能力が限られており，長く複雑な証明を理解できないのだとしたら，我々は自然数概念を理解してなどいなかったのだ，と開き直ることである．つまり，あくまで 4 〜 6 を固持し，むしろ我々が自然数概念を理解していることを拒否するということである．この場合，テイトは，自然数概念を十全に理解できるだけの認識能力，従って我々を大きく超えた認識能力を持つ，理想的な数学者について主張していることになる．

もう一つの仕方は，4 を取り下げ（従って T2-a を取り下げ），5, 6, 8, 9 を次のように弱めることである．

5-.　PRA に属する任意の主張 F について，有限主義的な型を理解し，かつ，F を理解するものは，態度決定を求められた場合，F を受け入れる．
6-.　PRA に属する任意の主張 F について，有限主義的な型を理解し，かつ，F を理解するものは，F を受け入れることを正当化されている．
8-.　1, 2, 3, 5- より，自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と，PRA に属する任意の主張 F について，C を受け入れ，かつ，F を理解するものは，態度決定を求められた場合，F を受け入れている．

9-. 1, 2, 3, 6- より，自然数についての任意のノントリビアルな数学的主張 C と，PRA に属する任意の主張 F について，C を受け入れ，かつ，F を理解するものは，F を受け入れることを正当化されている．

つまり，F を理解している，という条件を追加することで，デトレフセンが問題化した，F を理解していないようなケースを除外するということである．

この場合，「C を受け入れ，かつ，F を理解するもの」が指しうる範囲がどの程度になるのかが問題になる．もしも，これがもっぱら現実の数学者，ないし，現実の数学者と同等の認識能力を持つ可能的認識者だけを指しているとするならば，現実の数学者は極端に複雑な主張を理解できないだろうから，PRA に属する主張の中でもこうした主張については，不可避性にあたる性質は主張されていないことになる．従って，PRA の全域について不可避性を主張するためには，「C を受け入れ，かつ，F を理解するもの」を，より広い範囲，つまり，現実の数学者を超えた認識能力を持つ可能的な認識者を含めた範囲を指すものとして解釈せねばならない．従って，やはり何らかの理想化を導入することになる．

まとめると，このようにテイトの議論を改変し，理想化を導入すれば，デトレフセンの反論は決定的なものではない．だが，もちろんここで問題になるのは，ここで導入される理想化の有意味性と，そのような理想化を考える興味がどこにあるのかという問題である．この問題はテイトの議論の文脈を離れても意味を持つような興味深い問題だが，しかしあまりに大きな問題なので，ここでは扱わないことにする．

5 我々の批判

では我々が独自に提起する反論に話題を移そう. 我々の批判のターゲットは，T2-a ～ T2-c を導くアーギュメントのうち，3 番をターゲットとする．つまり，自然数概念を有限主義的な型として分析することの正当性に対する批判である．

テイトはこの主張を，自然数の知覚を有限列の知覚と関連づけることで，まず独自に動機づけている．だが，それなりの正当性をもって動機づけられた数

概念の分析はテイトのもの以外にも複数ありうる．それらとテイトの分析がどのように差別化されるのかをはっきりさせなければ，十分に3の主張を正当化できたとはいえないだろう．だがしかし，このような差別化は極めて困難である．これが我々が提起したい批判である．

テイト自身は，既に言及したように，ヒルベルト，フレーゲ，デデキントによる数の分析を取り上げ，それを各個に反駁することで差別化を試みている．我々がまず取り上げたいのは，彼がフレーゲとデデキントのやり方に対して浴びせた批判である．よく知られているように，フレーゲとデデキントは，ある条件を満たす無限集合を前提し，その中から，集合論的な操作によって，ω 列の構造を持つ集合を自然数として取り出すというやり方を取った．もしも彼らの数概念の分析が妥当であるならば, 数概念を理解するものは ω 列の構造を理解していると考えられるので，PRA どころか，二階のペアノ算術に属するような主張を, 概念の理解から正当化できることになるだろう. 従って, T2-a 〜 T2-c を導くことはできるだろうが， T2-a 〜 T2-c へのアーギュメントを前提して，T2-d を導くことはできなくなってしまう．

テイトが彼らに浴びせた批判はこうである．フレーゲとデデキントは，何らかの無限集合を前提しているが，しかしこの集合は一体どこからやってきたのか？　フレーゲはこれをあらゆる基数の集合として考えたが，あらゆる基数が集合を成すとすると矛盾をもたらすので，この考えは維持できない．デデキントは，思考可能な対象全体の集合をベースとなる集合として考えた．だが，この思考可能な対象全体の集合という概念を，ラッセルのパラドクスを避ける形で解釈することは不可能だろう．現代的には ZF 集合論のドメイン，つまり累積的集合の階層から，ベースとなる集合を取り出してくるという考え方が可能かもしれない．しかし，累積的集合の階層は，空集合から始めて，冪集合を取る操作を超限的に繰り返すこととして理解される．だが，超限的な反復という概念は，超限順序数によって数えられるような回数分の反復という意味でしか理解できない．つまり，累積的集合の概念は，超限順序数の概念を前提している．だが，超限順序数の概念は明らかにその中に自然数の概念を含んでいる．つまりこの説明は循環をきたしているのだ．従って，ZF 集合論に基いて自然数概念を説明する道は閉ざされている．他にも，何らかの幾何学的なドメインか

ら自然数を切り出してくるような道があるかもしれないが，幾何学的な概念は自然数概念よりも明確であるとはいえない．テイトの結論を引用しよう．

> 次のことは明らかであるように見えみえる．自然数概念(例えば,「有限列」の「有限」)や，自然数概念よりも明確なわけではない他の概念(例えば，幾何学的な考え)を含むことなく ⟨S,e,g⟩ (引用者註――自然数の構成のベースになる集合のこと)を定義する道はない．(p. 542)

テイトのいうことは確かに正しいだろう．だが，フレーゲ・デデキントの自然数概念の分析が以上のような事態に逢着することは，少なくとも現在の文脈では，決定的な瑕疵ではないはずだ．なぜなら，そもそもテイト自身が，自然数概念を有限主義的な型として分析する際，自然数の概念＝有限主義的な型の概念の理解を,有限の反復の理解を含むものとして説明しているからである (p. 531)．従って，自然数概念の理解は有限の反復の理解を前提し，有限の反復の理解は自然数概念の理解を前提するので，この分析もまた循環している．自然数概念の分析として現在求められているのは，自然数概念に内在するような推論原理を明らかにしてくれるような分析であり,たとえ分析が循環していても,その目標を果たすことは可能である．従って，この点をもってテイトの分析とフレーゲ・デデキントの分析を差別化することはできない．

だからテイトは，循環とは別の点を取り上げて，自身の分析とフレーゲ・デデキントの分析を差別化しなければならない．確かにテイトは，フレーゲに対しては，上記の論点とは別に，集合論的な構造を自然数に不当に持ち込んでしまうことを持ちだして批判している．だが，テイト自身も認めるように，デデキントの分析は，集合論的に構成した集合から，自然数にとって不必要な集合論的性質を捨象し，ω 列の構造だけを抽象するというプロセスを含んでいるため，この批判は当たらない．従って，テイトはデデキントの数概念の分析と自身の数概念の分析を十分に差別化できているとはいえないのである．

さらに，テイトのいうように，集合論的な自然数概念の分析が不可能であることを認め，タイプ理論的な分析を行うことを受け入れたとしよう．だがその上で，次のように論じることは不可能だろうか．テイトのいう有限主義的な型

よりも強い型システムの理解，例えばゲーデルの T や，あるいはジラールのシステム F といった型の理解として，自然数概念は分析されるべきである，と．ゲーデルの T は，任意の一階の論理式に対する数学的帰納法や，あるいは原始再帰汎関数の定義に基礎を与えることができる．さらにシステム F は，二階の数学的帰納法にあたる原理を内包している．従ってこれらの型の理解が自然数概念に含まれているとすれば，やはり T2-d は成立しなくなってしまうだろう．

テイトは別の論文でゲーデルの T について，T の理解は，関数の概念によって基礎づけられるべきだ，と述べている [Tait 2012, p. 165; Tait 2006]．テイトの意図は，T の理解には，自然数概念だけでなく，それを超えたものとして，関数の概念の理解が必要だ，ということだろう．また，システム F は，有限主義的な型にはない，型に対する量化を含んだシステムなので，やはりテイトは，自然数概念を超えた何らかの概念の理解が必要だ, と論ずることだろう. だが, T の理解に関数の概念の理解が，F の理解にそれとはまた別の概念の理解が必要だとして，それらが自然数概念の理解と切り離せるということはなぜいえるのだろうか．実際，自然数についてアッカーマン関数が定義できるとか，あるいは二階の数学的帰納法が成り立つとかいったことは，直観的には，我々の自然数概念の中の一部であるようにも思われる．だとすれば，こうした事柄を扱えるだけの型システムの理解，つまり T なり F なりの理解が自然数概念に含まれると考えるのは自然であろう．もしこうした型システムの理解が関数概念やその他の概念の理解を要求するなら，単にそれはそうした概念の理解が自然数概念の理解と切り離せないというだけである．

従ってテイトは，T2-d を擁護し，自らの自然数概念の分析だけが正しいと主張するためには，デデキントやフレーゲのような集合論的な構成だけでなく，T や F といったより強力な型システムによって自然数概念を分析する試みとも，自らの分析を差別化する必要がある．だが，これがどのように可能であるかは私にはわからない．

次のように再反論する道もある. つまり, 直観的な自然数概念は曖昧であり, それを哲学的に明晰化しようとすれば，有限主義的な型とも，T とも F とも，あるいはデデキントのようにも分析できるだろう．だが，たとえどのように明晰化しようとも，有限主義的な型にあたる内容はその中に含まれる．いわば，

自然数概念が複数化しうることを認めた上で，有限主義的な型が自然数概念の最小部分になっていることを主張するわけである. このように応答すれば, T2-a ～ T2-d そのままでなくとも，同様の地位を PRA について主張することができるかもしれない.

この応答に対する十分な再々反論を行う紙幅はもはやないが，簡単に方向性だけ示しておこう．いわゆる厳格有限主義者[10]や，極端な可述主義者[11]は，自然数の構成に対して，現実的な計算可能性や，あるいは厳格な可述性の要求を課すことで，原始再帰的な関数構成や量化子のない式への数学的帰納法を認めないような数概念の分析を行っているとみなせる．従ってテイトは，こうした試みが，自身の分析とは異なり，見込みがないことを主張しなければ，有限主義的な型が，様々な自然数概念のミニマルであることを議論することができない．そして私の考えでは，このような議論を行うのは極めて困難である[12]．従って, たとえ自然数概念の複数性を認めてもなお, PRA の特権性を T2-a ～ T2-d として主張することは難しいだろう.

6 結論

我々の考察の成果は次のようなものである．まず，テイトの議論を再構成するという目標については，先行するザックの試みが大筋において有効であることを見定めた上で， PRA を数の理解を構成する分析的主張群と捉えることで，ザックの再構成の穴を埋めた，より明確な再構成を提出した．テイトの議論の評価という目標については，まず，デトレフセンの批判が決定的なものでないことを確認した．その上で，自然数概念の理解を有限主義的な型の理解として分析する，テイトの数概念の分析を，他の分析と十分に差別化することができそうにないという問題を提起した．従って，テイトの議論の前提は維持しがたく，T2，T3 として表現されるような形での PRA の特権性を十分に擁護できているとはいえない.

もちろん以上の成果は限定的なものにすぎず，例えば，第五節冒頭で検討対象から除外した，有限主義的な型から正当化されうるのは本当に原始再帰的な原理だけか，という問題は手付かずである．この問題を論ずる上では，T4 自体

がどう導かれるのか(導かれるべきなのか)について，再度詳しく検討する必要があるだろう．また，第五節の最後の部分で言及した，厳格有限主義・極端な可述主義の数概念が，いかなるものであり，どう動機づけられるのかもほとんど述べなかった．こうした問題に関する私の見解は今後別の論文で述べるつもりである．

註

この原稿の内容は、2014 年哲学若手研究者フォーラムでの私の発表の冒頭部を、より詳細に論じなおしたものである。高橋優太氏、富山豊氏、信原幸弘氏、山田竹志氏（順不同）には、この原稿の初稿にコメントを頂いた。また、フォーラム当日の議論、特に渡辺公暁氏の質問が、この原稿の内容に反映されているはずである。皆様に感謝しておきたい。

1. PRA がどのような形式的体系であるかについては，例えば [Troelstra and van Dalen 1988] を参照．簡単にいえば，原始再帰的な関数構成と，量化子のない式に対する数学的帰納法を備えた体系である．原始再帰的な関数構成とは，関数 f,g が既に構成されている時に, $h(x, 0) = f(x), h(x, S(y)) = g(x, y, h(x,y))$ を満たすような関数を構成する手続きを指す（ただし，これは二変数関数の例）．
2. 以下，形式的体系としての PRA と，その形式体系に形式化されるような，意味を持つ主張の集まりとしての PRA を区別せず，どちらも PRA と呼ぶ．どちらを指すかは文脈から判断できるはずである．
3. 有限主義的な型とは，次の二種類の型を指す．自然数型 N――これはテイトによれば，有限回の反復を表現する型である――，及び，それをもとに生成される $N\wedge N\wedge N$ といった product の型．これが第一種の有限主義的な型といわれる．次に，変項と原始再帰関数への名前だけを含むようなターム t，s 同士の等式 $t = s$ と，それを ∧ で結んだ命題．これが第二種の有限主義的な型といわれる．両者において，∧ は型の要素の組を作ることに対応し，例えば $N\wedge N$ は自然数の対の型である．なお「有限主義的な型（finitist type）」という名前は問題含みである．というのも，有限主義的な型が有限的に理解できるということ，従って有限主義者が認めうる型であるということは，テイトの主張の一部であり，この名前は論点先取的に響く．
4. この問題は，テイト自身が [Tait 2002] で注意しているように，ヒルベルト学派に属する人々が，有限の立場について実際にどう考えていたのか，という歴史的問題と，実際問題としてどのように有限の立場を考えるべきか，という概念的問題の二つに分けて考えることができる．テイト自身はこの両者の問題に取り組んでいる．この論文はもっぱら後者の問に集中し，従って，テイトが後者の問について論じた部分だけに集中する．
5. タイプ理論の判断一般について同様の見解を擁護したものとして [Martin-Löf 1994] を参照．
6. 我々は第一節において，ザックが，有限主義的な型の概念に内在することと，任意のノントリビアルな数学的推論に前提されることが，互いの必要十分条件になっている，と考えているのではないかと示唆した．だが，T2-a ～ T2-c を導くアーギュメントで現

れている両者の関係は，有限主義的な型に内在する推論が，任意の推論に前提されている，という方向だけである．別方向の関係は，T2-d を導くアーギュメントの中で現れる．註の 7 を参照．

7. これが，註の 6 で言及した，有限主義的な型に内在することと，任意の推論に前提されていることの，別方向の関係にあたる．
8. この後我々は，累積的集合の概念から，フレーゲ・デデキントの方法で自然数概念を分析するやり方を検討するが，これは自然数概念が累積的集合の概念と切り離せないと考える例である．
9. ここで取り上げない批判としては，T2，T3，T4 に関わるものの中では，[Zach 2001]．T1 に対しては，[Kreisel 1970][Schirn 2005] がある．これらの一部にテイトは [Tait 2002][Tait 2005] で再反論している．
10. 例えば，[Yessenin-Volpin 1970][van Dantzig 1955] を参照．
11. [Nelson 1986] を参照．
12. このような意図の議論として例えば [Dummett 1975] があるが，これに対しては [Wright 1982][Magidor 2012] などの批判がある．また，厳格可述主義に対してはダメットの議論は全く当たらない．この点については今後別の論文で論じたいと思っている．

参考文献

Detlefsen, M., 1986, *Hilbert's Program*, Dordrecht.

Dummett, M., 1975, Wang's paradox, *Synthese* 30（3-4）:201-232.

Kreisel, G., 1970, Principles of proof and ordinals implicit in given concepts, in *Intuitionism and proof theory*（ed. Kino and Myhill and Vesley, North-Holland）: 489-516.

Magidor, O., 2012, Strict Finitism and the Happy Sorites, *Journal of Philosophical Logic* 41（2）:471-491.

Martin-Löf, P., 1994, Analytic and Synthetic Judgements in Type Theory, in *Kant and Contemporary Epistemology*（ed. Parrini, Springer）:87-99.

Nelson, E., 1986, *Predicative Arithmetic*, Princeton University Press.

Nelson, E., 2011, Warning Signs of a Possible Collapse of Contemporary Mathematics, in *Infinity: New Research F rontiers*（ed. Heller and Woodin, Cambridge University Press）:76-86.

Schirn, M and Niebergall, K., 2005, Finitism = PRA ? On a Thesis of W. W. Tait, *Reports on Mathematical Logic* 39: 3-26.

Tait, W., 1981, Finitism, *The Journal of Philosophy*, 9: 524-546.

Tait, W., 2002, Remarks on Finitism, in *Reflections on the Foundations of Mathematics: Essays in honor of Solomon Feferman*（ed. Sieg and Sommer and Talcott, Association for Symbolic Logic）: 407-416.
Tait, W., 2006, Godel's interpretation of intuitionism, *Philosophia Mathematica* 14（2）: 208-228.
Tait, W., 2012, Primitive Recursive Arithmetic and Its Role in the Foundations of Arithmetic: Historical and Philosophical Reflections, in *Epistemology versus Ontology*（ed. Dybjer and Lindstroem and Palmgren and Sundholm, Springer）: 161-180.
Tait, W., 2005, Appendix to Chapters 1 and 2, in his *The Province of Pure Reason*: 54-60.
Troelstra, A.S. and van Dalen, D. 1988, *Constructivism in Mathematics*, vol. 1, Elevier.
van Dantzig, D. 1955, Is 10^{1010} a Finite Number?, *Dialectica*, 9: 273–277.
Wright, C., 1982, Strict Finitism, *Synthese*, 51（2）:203-282.
Yessenin-Volpin, A. S., 1970, The ultra-intuitionistic criticism and the antitraditional program for foundations of mathematics, in *Intuitionism and proof theory*（ed. Kino and Myhill and Vesley, North-Holland）: 3-45.
Zach, R., 2001, Hilbert's Finitism: Historical, Philosophical, and Metamathematical Perspectives, PhD thesis, University of California.