

フレーゲにおける論理的分析の方法と 分析のパラドクス

高橋 優太

はじめに

G・フレーゲが着手した「論理主義 (logicism)」のプロジェクトとは、大まかに言って、算術を論理学に還元することを目指すプロジェクトである。要するに、論理法則と論理的な概念のみが含まれる定義だけを用いて、算術の公理を証明するということをそのプロジェクトは目的とする。論理的な概念のみを用いた定義と論理法則だけを用いて算術の公理を証明するために、フレーゲは、0 や 1 といった個々の基数、基数間の後続者関係などの定義を与えた。これらの定義は、基数概念を正しく明確に説明するという意図のもとで与えられたと言える。すなわち、これらの定義は、基数概念についての論理的分析を与えるという意図のもとで与えられたのである。

本稿の目指すところは、フレーゲの論理主義のプロジェクトがもつこの「論理的分析」という側面を検討することにある。より具体的に言えば、フレーゲによってなされた論理的分析がもつ重要な特徴を指摘したい。

そのために、本稿が手がかりとするのは、「分析のパラドクス (the paradox of analysis)」と呼ばれる議論である。ただし、この議論は、論理主義のプロジェクトの脈絡とは独立に提起されたものである。この議論は、概念分析一般についての次のようなパラドキシカルな結論を与える。すなわち、「どのような分析が与えられようと、それは実質のある情報を与えないかあるいは正しくないかのいずれかである」という結論である。分析のパラドクスは、概念分析という手法を用いることのうちに見られる問題点を指摘しようとするものである。この問題点は、概念分析の一例と言える、フレーゲによる論理的分析にもあてはまると考えられている。

フレーゲによる論理的分析と分析のパラドクスとの関係について詳細な研

究を与えていた者一人に、M・ビーニー¹がいる。ビーニーの研究を手がかりに、「分析のパラドクスに対してはフレーゲの側からどのような応答を引き出すことができるのか」という点を検討することは、フレーゲによる論理的分析がどのような仕方で分析対象の明確化を与えようとしているのかを明らかにするために役立つはずである。そして、結論としては、次のことを主張したい。すなわち、フレーゲによる論理的分析の内に見られる分析方法は、分析対象を含む理論体系を新しく構成するというものである。そして、こうした方法は、分析のパラドクスが指摘する問題に妥当な仕方で応答しうるような、洗練された方法である、と。

では、以上のこととまとめて、本稿の目的をもう一度述べておくことにしたい。本稿の目指すところは、「分析のパラドクスに対してフレーゲの側からどのような応答を引き出すことができるのか」という点の検討を手がかりに、フレーゲが行なった論理的分析の重要な特徴を明らかにすることにある。

最後に、本稿の大まかな構成について述べる。まず、フレーゲの論理主義のプロジェクトについて概観し、その実行過程において基数概念の論理的分析が与えられたということを確認する(1節)。次に、分析のパラドクスを定式化し、パラドクスに対するフレーゲ的応答としてすぐに思い至る、「意義(Sinn)」と「イミ(Bedeutung)²」の区別をもとにした応答を取り上げる(2節)。そこでは、その応答のもつ問題点が指摘されるが、この問題点を克服できるようなもう一つのフレーゲ的応答をさらに取り上げる(3節)。この応答でもって、分析のパラドクスが指摘する問題に妥当な仕方で応答できること私は考える。そして、フレーゲが行なった論理的分析がもつ重要な特徴を、この応答を通して指摘したい。

1 フレーゲによる基数概念の論理的分析

本節の目的は、フレーゲが論理主義のプロジェクトにおいて基数(Anzahl)³概念についての論理的分析を与えたことを確認することにある。そこで、まず、フレーゲが自身の著書『算術の基礎(Die Grundlagen der Arithmetik)』(以下、『基礎』と略記)で素描を与え、続く『算術の基本法則(Grundgesetze der Arithmetik)』

(以下、『基本法則』と略記)で厳密に実行に移した「論理主義」のプロジェクトを概観する(1.1節)。そのプロジェクトを素描・実行する過程において、フレーゲは、0や1といった個々の基数、基数間の後続者関係などの定義を試みたのであるが、こうした定義はそれらについての論理的分析を与えると捉えることができること、言い換えれば、基数概念の論理的分析を与えると捉えることができることを次に確認する(1.2節)。以上が、本節の大まかな見取り図である。

1.1 論理主義のプロジェクト

まず、フレーゲの論理主義とはどういった立場であるのかを簡単に確認することから始めたい。そのためには、『基礎』の冒頭部で提起される問い合わせていくべきであると思われる⁴。それはすなわち、算術的真理は分析的な(analytisch) 真理であるかそれとも総合的な(synthetisch) 真理であるか、という問い合わせである。

フレーゲによれば、ある真理が分析的であるとは、その真理が論理法則と定義のみを用いて証明されるということである。その一方で、ある真理が総合的であるのは、一般性をもたずに特定の領域に関係するような真理が、その真理の証明に必要となるとき、そのときに限る、とされる。例えばフレーゲは、幾何学の定理は総合的であるとみなす。幾何学の公理は点や線といった空間的なものの領域に関係する。したがって、それを用いて証明される幾何学の定理は総合的であることになる⁵。

算術的真理は分析的であるか、それとも総合的であるか、という問い合わせるために次のこととなす必要があるとフレーゲは考える。すなわち、算術において基礎となる命題(Satz)⁶を、それが証明可能なものであるならば、厳密に証明するということである。算術において基礎となる命題(算術の公理)を、隠された前提を一切もたない推論によって証明すれば、その証明に基づく真理をすべて枚挙できる。そして枚挙された真理が、論理的真理のような一般性をもつものであるか、それとも特定の領域に関係するものであるかを確認していくけば、証明された命題が分析的真理であるかまたは総合的真理であるかを確定できるだろう。算術の公理を用いて証明される他の算術命題については、

その基礎的な命題に関してなされる分析的／総合的の区別をもとにさらに判断していけばよい。

当の問い合わせとフレーゲが与えた答えは、算術的真理は分析的真理であるというものである。つまり、算術の公理は定義と論理法則のみから厳密に証明されるとフレーゲは主張する。フレーゲの論理主義とは、要するにこうした主張をする立場である。そして、その論理主義が掲げるプロジェクトとは、算術の公理・定理を、論理的な概念のみを用いた定義と論理法則だけから証明することを目指すというものである。『基礎』においては、このプロジェクトの素描が与えられるにとどまった。具体化されたプロジェクトの実行が開始されたのは、『基本法則』第1巻においてである。

1.2 定義による論理的分析

ここまで、フレーゲの論理主義のプロジェクトを概観してきた。次に、このプロジェクトを素描・実行する過程において、フレーゲは基数概念についての論理的分析を与えたということを見ていきたい。論理主義のプロジェクトを素描・実行する過程において、フレーゲは、0や1といった個々の基数、基数間の後続者関係などを、論理学の範囲に属すると彼が考えた概念のみを用いて定義した。算術の公理を定義と論理法則のみから証明するためには、そういった定義をする必要があったのである。そして、これらの定義において、基数概念についての論理的分析が提示されると言える。フレーゲは『基礎』において次のように述べている。

さて、この要求 [算術の基本命題を、それが証明可能なものであるならば、厳密に証明せよという要求] を履行しようとすれば、我々はたちまち次のような諸命題に到達する。それは、その中に登場する諸概念をより単純なものに分析する、あるいはより一般的なものへ還元することに成功しない限り、証明が不可能な命題である。さて、こうした概念の一つとして特に基数 [概念] があり、これは定義されるか、さもなくば、定義不可能なものとして承認されなければならない⁷。

ここで示唆されているのは、算術の基本命題を厳密に証明するためには、基数概念を分析する必要があり、そして、こうした分析は、個々の基数や基数間の後続者関係などに与えられる定義によって提示される、ということである。

例えば、『基礎』の中で与えられる基数 0 の定義は次のものである。上で示唆された考え方によれば、この定義は基数 0 についての分析を与えるものである。

(z) 0 とは、**概念** (Begriff) <**概念** <自己自身と同一でない> と等数 (gleichzahlig) である> の外延 (Umfang) である⁸。

『基礎』においてフレーゲは、ここで言う「**概念**」とは何を表すのかをはつきり説明してはいないが、ひとまず、それはものがもつような性質 (Eigenschaft) であると言うことができる⁹。表現「**概念** <自己自身と同一でない>」は、自己自身と同一でないという性質を表す。また、**概念 F** の外延とは、性質 F をもつものすべてとしてそれのみを集めて構成される集まり (クラス) のことである¹⁰。そして、**概念 F** は**概念 G** と等数である、ということは要するに、**概念 F** に属するもの (性質 F をもつもの) は**概念 G** に属するものと一对一に対応づけられるということであり、さらに言い換えれば、**概念 F** には、**概念 G** に属するものの数と同じ数だけのものが属するということである¹¹。以上のこと踏まえると、上で述べた定義 (Z) によれば 0 とは次のようなものに他ならない。すなわち、**概念** <自己自身と同一でない> に属するものの数と同じ数だけのものが属する**概念**を集めてできるクラス、つまり、どんなものも属さないような**概念**のクラス、である。基数 1 の定義や、基数間の後続者関係の定義といった、フレーゲによる他の定義が論理的分析を与えることについても、同様の説明が可能であるだろう。

これまで、1.1 節と 1.2 節では、1.) フレーゲの論理主義とは、算術の公理を、論理的な概念だけを用いた定義と論理法則のみから証明することを目指す立場であること、そして、2.) そのプロジェクトを素描・実行する過程で与えられた、基数概念に関する諸々の定義は、基数概念の論理的分析を与えるものであること、この二つを見てきた。さて、分析のパラドクスとは、こうした、探究

対象を「分析する」ということを巡るパラドクスである。このパラドクスは、論理主義の脈絡とは独立に提起されたものではあるが、フレーゲによる基数概念の分析についても問題となるものであると私は考える。それでは、次節において、このパラドクスを定式化することにしたい。

2 分析のパラドクス

本節では、まず、本稿における分析のパラドクスの定式化を与える(2.1節)。その次に、パラドクスに対するフレーゲ的応答としてすぐに思い至る、「意義」と「イミ」の区別をもとにした応答を取り上げる(2.2節)。そして、この応答がもつ問題点を確認して、その問題点を克服できるようなもう一つのフレーゲ的応答(これは3節で取り上げる)への橋渡しをしたい。

2.1 パラドクスの定式化

さて、分析のパラドクスを簡潔に定式化すれば、次のようになる。このパラドクスが、フレーゲによる基数概念の論理的分析に固有の問題ではないことを強調するために、例として、知識の概念を分析する場合を考える¹²。

知識とは、正当化された真なる信念である。

以下では、知識概念のこうした分析を、「知識概念の古典的分析」と呼ぶことにする。さて、ここで、もし、「知識」という語のもつ意味と「正当化された真なる信念」という語のもつ意味が同一であるならば、この分析は単なる同一性を述べるものであり、実質のある情報を与えない。一方で、もし、「知識」という語のもつ意味と「正当化された真なる信念」という語のもつ意味が異なるならば、前者の意味は後者の意味によって捉えられていないことになり、この分析は正しくない。よって、これら二つの表現の意味が同一である場合においても、また、異なる場合においても、知識概念の古典的分析は正しくないかあるいは実質のある情報をもたらさないかのいずれかである。したがって、結局、知識概念の古典的分析は、正しくないかあるいは実質のある情報をもたらさないか

のいづれかであるということが言える。このことを一般化すれば、次のことが言える。すなわち、どの分析も、正しくないかあるいは実質のある情報をもたらさないかのいづれかである。

以上のように定式化された議論がもつ前提是、次の二つである。ただし、以下では、 E_1 は分析対象を表す任意の表現（被分析項）であり、また、 E_2 は分析結果を表す任意の表現（分析項）であるとする。このように、以下の二つの前提是一般的な形で述べられているが、知識概念の古典的分析の例で言えば、「知識」が被分析項であり、「正当化された真なる信念」が分析項である。

(i) 分析 A は正しい \Rightarrow

分析 A における被分析項 E_1 と分析項 E_2 は同一の意味をもつ

(ii) 分析 A における被分析項 E_1 と分析項 E_2 は同一の意味をもつ \Rightarrow

分析 A によって実質のある情報を得られない

ここで用いた「意味」という語は、われわれが通常その語で理解する限りでの、言語的意味を表すものであると理解されたい。

以下では分析のパラドクスへの応答としてフレーゲの著作から引き出せる議論を見ていくが、こうした議論としてすぐに思い浮かぶのはフレーゲによる「意義 (Sinn)」と「イミ (Bedeutung)」の区別であるだろう。そこで、以下ではまず、言語表現がもつ意義とイミの区別をもとにした応答を見ていくことにする。

2.2 Sinn と Bedeutung の区別による応答

議論をなるべく単純なものにするため、以下で本稿が取り上げる概念分析の例は、被分析項・分析項が単称名辞であるものに限ることにする。そのため、本稿において主に問題となるような「言語表現の意義・イミ」は、単称名辞の意義・イミである。単称名辞の意義・イミについて簡単に説明すると、こうなる。まず、一般に、言語表現がもつ意義とイミの区別とは、簡潔に言えば、次のような区別である。すなわち、言語表現のイミとは、その表現によって表示

されるものであり、言語表現の意義は、その表現によって「表示されたものの与えられる様態（die Art des Gegebenseins des Bezeichneten）」¹³である。

例えば、「宵の明星」と「明けの明星」によって指されるものはともに金星である。単称名「宵の明星」と「明けの明星」によって指されるものが、それらの表現によって表示されるものに他ならない。したがって、これら二つの単称名のイミは金星であることになる。また、これらがもつ意義については次のように述べることができる。単称名「宵の明星」を理解することによって、それが指すもの（金星）は、「夕方西の空に輝く星」として与えられる。その一方で、単称名「明けの明星」を理解することによって、それが指すもの（金星）は、「明け方東の空に輝く星」として与えられる。ここで言う、単称名「宵の明星」と「明けの明星」を理解することによって、「それらの指すもの（金星）が与えられる仕方」こそが、単称名「宵の明星」と「明けの明星」によって表示されるもの与えられる様態なのであり、つまり、単称名「宵の明星」と「明けの明星」の意義なのである。

意義・イミについての説明は以上で終えることにして、次に移りたい。

言語表現の意義とイミの区別による分析のパラドクスへの応答とは、以下のものである¹⁴。まず、分析のパラドクスの論証がもつ二つの前提

(i) 分析 A は正しい⇒

分析 A における被分析項 E_1 と分析項 E_2 は同一の意味をもつ

(ii) 分析 A における被分析項 E_1 と分析項 E_2 は同一の意味をもつ⇒

分析 A によって実質のある情報は得られない

は、それぞれ次のような役割をもつと言える。すなわち、前提 (i) は、分析が正しくあるための必要条件を定める役割をもち、前提 (ii) の対偶は、分析が実質のある情報を与えるための必要条件を定める役割をもつ。しかし、これらの前提について言えるのは、その中で言及されている「意味」と呼ばれるものが一般的で曖昧であるということである¹⁵。そして、曖昧なまま「意味」と呼ばれているものの内に意義とイミの区別を行なえば、次の二つの前提が成り立つ

ことが言える。

(i)' 分析 A は正しい \Rightarrow

分析 A における被分析項 E_1 と分析項 E_2 は同一のイミをもつ

(ii)' 分析 A における被分析項 E_1 と分析項 E_2 は同一の意義をもつ \Rightarrow

分析 A によって実質のある情報は得られない

これらの前提が述べることは、要するに、ある分析が正しくあるためにはその被分析項と分析項の表示するものが同一である必要があり (i)'、そして、その表示されるものを被分析項と分析項が異なる仕方で与えるという条件が、その分析が実質のある情報を与えるための必要条件である (ii)'、ということである。分析のパラドクスの論証がもっている前提 (i)・(ii) は曖昧であるゆえに捨てられるべきであり、それらに置き換わるものとして (i)'・(ii)' を採用する、というのが意義とイミの区別による応答である。こうして、パラドクスの前提是否定されることとなる。また、前提 (i)'・(ii)' でもって分析のパラドクスの論証と同様の論証を再現することはできない、ということが言える。

これまで、分析のパラドクスへの、意義とイミの区別をもとにした応答を見てきた。この応答を検討するために、ここでさらに次のように問うてみたい。その問い合わせはすなわち、ある分析が正しくあるためには、結局、被分析項と分析項の意義が同一である必要があるのではないか、というものである¹⁶。

こうした問い合わせを提起する理由は、被分析項のイミと分析項のイミが同一であるにもかかわらず正しいとは言えないような分析があるからである。例えば、次のような分析を考えてみる¹⁷。

(iii) 宵の明星とは、明け方東の空に輝く星のことである。

要するに、ここでは、表現「宵の明星」がもつ意味の分析が、表現「明け方東の空に輝く星」がもつ意味によって与えられている。意義とイミの区別を踏まえれば、これらの表現の意義は異なるが、イミは同一である（すなわち、これ

らの表現はともに金星を表示する)と言える。したがって、前提 (i)' が述べる、分析が正しくあるための必要条件を、分析 (iii) は満たしている。しかし、分析 (iii) は正しいものではないだろう。表現「宵の明星」を理解することによって、その指示対象は、明け方東の空に輝く星としてではなく、夕方西の空に輝く星として与えられる。そして、表現「宵の明星」の指示対象が与えられる仕方(表現「宵の明星」の意義)は、説明されるべき「宵の明星」の意味に含まれていると言える。したがって、表現「宵の明星」の意味を、明け方東の空に輝く星として説明することは誤っている。

被分析項のイミと分析項のイミが同一であるにもかかわらず正しいとは言えないような分析があることは、次のことを示唆していると思われる。すなわち、ある分析が正しくあるためには、その分析における被分析項と分析項は同一の意義をもつ必要がある、と。この示唆に従うならば、ある分析が正しくあるための必要条件は、前提 (i)' に代わって、次のような条件によって定められるをえないように思われる。

(意義の同一性テーゼ) :

分析 A は正しい ⇒

分析 A における被分析項 E₁ と分析項 E₂ の意義は同一である¹⁸

しかし、このテーゼと前提 (ii)' からは、再び分析のパラドクスが論証されてしまう。つまり、意義の同一性テーゼと前提 (ii)' より、

分析 A は正しい ⇒

分析 A からは実質のある情報は得られない

ということが帰結してしまう。そのため、先ほど提起した問い合わせ、「ある分析が正しくあるためには、被分析項と分析項の意義が同一である必要があるのではないか」という問い合わせは、ぜひとも否定的に答えられなければならない。それでは、節を改めて、この問い合わせに対するフレーゲ的応答を見ていくことにする。

3 理論体系の構成による論理的分析

本節の目的は、前節で指摘された問題点を克服できるような議論を、再びフレーゲの側から引き出すことである。前節で指摘された問題点とは、次のようなものであった。すなわち、ある分析が正しくあるためには被分析項と分析項の意義が同一である必要があるように思われるが、もしそうであるとすると、分析のパラドクスが再び論証されてしまう、というものであった。要するに、分析のパラドクスに対し、意義とイミの区別による応答を試みた結果、意義の同一性テーゼは成り立つか否かという問い合わせが新たに生まれた。しかし、本節で述べる議論でもって、このような問題に妥当な仕方で応答できると私は考える。つまり、意義の同一性テーゼは成り立たないということを、本節の議論によって示せると私は考える。このことを述べた後、本稿の目的である、フレーゲが行なった論理的分析がもつ重要な特徴の指摘を、この応答を通して行なうことについてしたい。

3.1 理論体系の再構成

フレーゲは、1914年の講義録「数学における論理（Logik in der Mathematik）」の中で、数学の中でなされる定義の本性についての考察を行っている¹⁹。それは、一般に定義と呼ばれるものの中で二つの種類のものを区別するという趣旨の考察である。本節で定式化し検討する、意義の同一性テーゼへの反論は、この考察から引き出されるものである。そういうわけで、まず、定義の本性に関するこの考察から見ていくことにする²⁰。

まずフレーゲは、定義が行われる二つの場合を区別する。一つ目の場合は、複合表現の省略表現を導入するときに定義が行われる場合である²¹。こうした定義は、導入される省略表現が複合表現と同じ意味をもつことを約定する役割をもつ。フレーゲはこうした定義を「構成的定義（aufbauende Definition）」と呼んでいる²²。また、フレーゲは、次に述べる二つ目の種類の定義ではなく、この「構成的定義」こそが真正の定義であると主張する。その理由は、被定義項の意義と定義項の意義が一致するよう任意に取り決めることが本来の定義であるとフレーゲは考えるからである²³。

定義が行われるもう一つの場合については、フレーゲはこう述べる。

もうとっくに一つの単純記号が使われてきている場合。この場合、われわれはそれの意義を論理的に分析できると思うし、そしてその意義と同じ意義を表現しているとわれわれが考える、一つの複合表現が得られると思う。複合表現の構成要素として認めるのは、それ自身は認された意義を有するものだけである。この複合表現の意義は、その構成の仕方に従って結果しなければならない。その意義がとうに慣用となっている単純記号の意義と一致するということは、任意に取り決められたことではなくて、直接な理解によってしか認識されない。ここでも確かに定義について語られている。第一の場合と区別して、これを「分析的定義 (zerlegende Definition)」と呼ぶことができよう。しかしそういよいよ、「定義」という語をまったく避けることである²⁴。

つまり、二つ目の場合とは、すでに使用されている単純な表現の意義を、複合表現の意義によって構成し、それを定義として提示する場合である。したがって、この場合の定義は任意の取り決めによってなされるのではない。その単純な表現の意義と複合表現の意義が一致するとしても、このことは、われわれがそう取り決めたということによるのではないのである。

そもそもここでの考察は数学においてなされる定義についてのものであるが、この分析的定義という方法は哲学における方法でもあり、この方法が分析のパラドクスにおいて問題になっていると言えるだろう。実際にフレーゲはこの引用箇所で、ある単純表現に分析的定義を与えることを「論理的に分析する (logisch zerlegen)」という言い回しで表現している。

「定義」として行われることの中には「分析的定義」と呼ぶことのできるものがあることを指摘した上で、フレーゲは、分析的定義が正しいかどうかはどういうような根拠から判断されるのかということを問題にする²⁵。要するに、ここでフレーゲは、与えられた分析的定義が正しくあるための十分条件はどういうものかということを問題にしていると言える。フレーゲは、この問題を、分析的定義が与えられる二つの場合に分けて考察する。結論としては次のように

る。すなわち、一つ目の場合と二つ目の場合のそれぞれに応じて、与えられた分析的定義が正しくあるための二つの異なった十分条件があるとフレーゲは考える。

さて、一つ目の場合とは、与えられた分析的定義において、被分析項の意義と分析項の意義が一致すると直ちに主張できる場合である。(フレーゲは例を挙げて説明しているわけではないが、例えば、被分析項が「宵の明星」であり、分析項が「夕方西の空に輝く星」である場合を考えられたい。) この場合はまさに、被分析項の意義と分析項の意義が一致すると主張することによって、与えられた分析的定義が正しいことを示すことができる。しかし、こうした仕方で正しさを示すことができるのは、与えられた分析的定義が自明であるときのみである、とフレーゲは述べる²⁶。

次の二つ目の場合とは、与えられた分析的定義において、被分析項の意義と分析項の意義が一致すると直ちには主張できない場合である。この場合、与えられた分析的定義には疑問の余地があることになる。そのため、被分析項の意義と分析項の意義が一致することを示すことにおいて、われわれは困難にぶつかることになる。しかし、フレーゲは、この場合、被分析項の意義と分析項の意義が一致することを示すという仕方ではなく、次のような仕方で、与えられた分析的定義が正しいことを示すことができると考える。

A をとうに慣用となった単純記号(表現)とし、その意義をわれわれが論理的に分析しようと試みたと仮定しよう。そして、この分析を描写するものとして一つの複合表現を構成することによって、その論理的分析を行なうとしよう。分析が成功しているのかどうか確かではないのだから、われわれはその複合表現をかの単純記号*A*によって代理されるものと称することは、敢えてしない。もしわれわれが本来の定義を打ち立てようと欲するのであれば、すでに意義を有している記号*A*を選んではならず、むしろまったく新しい記号、例えば*B*、を選ばねばならない。その記号に、今定義によって初めて、かの複合表現の意義が与えられる。さて問題は、*A* と *B* とが同じ意義を有するか、ということである。しかしそれわれは、体系の構成を根本から新しくし、その際 *A* をまったく用いないで *B* のみ用いるこ

とによって、この問題の解答を完全に避けて通ることができる²⁷。

もしわれわれが記号 A を必要とすることなしに、数学体系の構成に成功するならば、われわれはそれで納得できるし、以前にこの記号がいかなる意義で使われていたかという問い合わせにも、答える必要はまったくない²⁸。

これらの箇所で述べられていることを、フレーゲによる基数 0 の分析を例として説明してみたい。この分析における被分析項（慣用となっている表現「0」）の意義と分析項（「概念〈概念〈自己自身と同一でない〉と等数である〉の外延」）の意義が一致するかどうかは、たとえわれわれがこれら二つの表現の意義を把握したとしても直ちに明らかのことではない。このため、基数 0 の分析は今の場合の例としてふさわしいだろう。

さて、慣用となっている表現「0」の意義を分析した結果、複合表現「概念〈概念〈自己自身と同一でない〉と等数である〉の外延」が構成されたとする。これらの表現の意義が一致するかどうかは直ちに明らかのことではない。そのため、もしわれわれがこのことを示そうと試みるならば、われわれは困難にぶつかることになる。

しかし、この場合、これらの表現の意義が一致することを示すという仕方ではなく、以下のような仕方で基数 0 の分析が正しいことを示すことができる。まず、構成的定義によって、複合表現「概念〈概念〈自己自身と同一でない〉と等数である〉の外延」と同一の意義をもつ新しい表現「0*」を導入する²⁹。そして、この新しい表現「0*」を慣用となっている表現「0」と置き換えて、算術体系をまったく新しく構成する。ここで、新しい算術体系の構成に成功するならば、われわれは、それで基数 0 の分析が正しいことを示すことができるのである。

ただし、新しい理論体系の構成に成功したと言えるのはどのような場合であると考えられているのかは、フレーゲの叙述からは明らかではない。また、前段落で述べたような仕方でフレーゲによる基数 0 の分析の正しさが示されるとき、慣用となっている表現「0」と新しい表現「0*」のイミは同一でなくてはならない（それらの表現は同一の対象を指していなくてはならない）と、「数学に

おける論理」を書いた頃のフレーゲがみなしていたかどうかもはつきりしない。すなわち、前節で取り上げた前提 (i)’ に相当するものをその頃のフレーゲが認めていたのかは定かではない。本稿はこれらの点について論じることはできないが、これらの点とはひとまず独立に、意義の同一性テーゼへのフレーゲ的反論を論じることができるだろう。

また、もちろん、算術体系を構成するためには、基数 0 を導入するだけでは不十分である。他にも、同様にフレーゲが分析を与えた、基数間の後続者関係などが導入されなければならない。したがって、次のように考えるべきである。すなわち、フレーゲによる基数 0 の分析は、新しい算術体系の構成に成功することによって、基数概念に関する諸々のフレーゲ的分析とともに正当化される、と。以上が、上の二つの引用箇所で述べられていることの説明である。

では、慣用となっている表現「0」を新しい表現「0*」で「置き換える」ことが正当化される根拠とは何だろうか。それは、慣用となっている単純表現「0」の意義がそもそも明確に把握されていないからである。この点についてフレーゲはこう述べる。

次のように問うことができる。単純記号の意義が知られているばかりか複合表現の意義もまたその構成の仕方から知られている場合に、単純記号が複合表現と同じ意義を有しているかどうかが疑わしいということは、いかにして可能か、と。実際には、単純記号の意義が事実上明確に把握されているならば、その意義が複合表現の意義と一致していることを疑う余地はない。この複合表現の意義が構成の仕方から明確に知られうるにもかかわらず、そのことが疑わしいとすれば、疑う根拠は、その単純記号の意義が明確に把握されてはおらず、ちょうど、靄を通して見られるようにその輪郭がぼやけている、ということでなければならない。それゆえ、かの論理的分析の成果はまさしく、意義が明瞭に導出されるということである³⁰。

この箇所で述べられている議論が前提しているテーゼは、次のものである。

(意義把握に関するテーゼ) :

人物 P は表現 E_1 の意義と表現 E_2 の意義を明確に把握している \Rightarrow

人物 P にとって、表現 E_1 の意義と表現 E_2 の意義が同一であるかどうかは自明である³¹

この意義把握に関するテーゼは、一つの原理と呼ぶべきものであり、他の主張から正当化されるようなものではないと思われる。とはいっても、このテーゼは、言語表現の理解についてのわれわれの実感と適合していると言えるだろう。ある人が二つの表現の意義を本当に理解しているのならば、その人はそれらの意義が一致するかどうか知っているだろう、と想定するのはもっともであると思われるからである。すなわち、ある人が二つの表現について、それらの表示するものが与えられる仕方をそれぞれ把握しているならば、それらの表示するものが同一であるかどうか、さらに、それらが与えられる仕方が同一であるかどうかを知っていると想定することはもっともであると言える。

さて、すぐ上の引用箇所で述べられていることを再び例を用いてまとめると、こうなる。慣用となっている表現「0」の意義と、複合表現「概念〈概念〈自己自身と同一でない〉と等数である〉の外延」の意義が一致するかどうかは自明なことではない。したがって、このことと意義把握に関するテーゼより、1.) 前者の意義が明確には把握されていないか、2.) 後者の意義が明確には把握されていないか、3.) どちらの表現の意義も明確には把握されていないかのいずれかであることになる。ここで、2.) と 3.) の場合はありえない。なぜなら、複合表現「概念〈概念〈自己自身と同一でない〉と等数である〉の外延」を構成する「概念 X の外延」、「概念 X は概念 Y と等数である」、「概念〈自己自身と同一でない〉」といった表現は、フレーゲの概念記法の枠組みに属する表現であり、それらの意義は明確に説明されるからである³²。この複合表現の意義は明確に把握されている。したがって、結局、慣用となっている単純表現「0」の意義が明確には把握されていないことが言える。そしてこのことが、表現「0」を、意義が明確に把握されている新しい表現「0*」で置き換えることを正当化する根拠となるのである。

ここまで、数学の中でなされる定義の本性についてのフレーゲによる考察を

見てきた。その考察の中に含まれていた議論、すなわち、分析的定義が正しくあるための十分条件についての議論からは、そのまま意義の同一性テーゼ

分析 A は正しい \Rightarrow

分析 A における被分析項 E_1 と分析項 E_2 の意義は同一である

への反論を引き出すことができる。フレーゲの言う「分析的定義」とは本稿の言う「分析」に他ならないゆえに、分析的定義が正しくあるための十分条件は、分析が正しくあるための十分条件でもあるのである。

被分析項と分析項の意義が同一であることは分析が正しくあるための必要条件ではない、ということを示す議論は、以下のものである³³。フレーゲによる基数 0 の分析を例にとろう。基数 0 は、「**概念**〈**概念**〈自己自身と同一でない〉と等数である〉の外延」へと分析される。慣用となっている表現（被分析項）「0」の意義と、複合表現（分析項）「**概念**〈**概念**〈自己自身と同一でない〉と等数である〉の外延」の意義が一致するかどうかは自明なことではない。しかし、この複合表現の意義は明確に把握されている。よって、意義把握に関するテーゼより、慣用となっている表現「0」の意義は明確には把握されていないことが言える。このことが、表現「0」を意義が明確に把握されている新しい表現「0*」で置き換えて、算術体系を新しく構成することを正当化する根拠となるのである。（ここで、新しい表現「0*」は、約定によって、複合表現（分析項）「**概念**〈**概念**〈自己自身と同一でない〉と等数である〉の外延」の意義と同一の意義を与えられている。）そして、新しい算術体系の構成に成功するならば、（他のフレーゲ的分析とともに）フレーゲによる基数 0 の分析が正しいことを示すことができる。この議論のポイントは、基数概念についてフレーゲが与えた諸々の分析の正しさを、それぞれ個別に問うのではなく、算術体系の構成という点からひとまとめに問う、という点である。

そして、新しい算術体系を構成するという試みは、まさに、論理主義が試みるものである。論理主義のプロジェクトは、算術の公理を定義と論理法則のみから証明することを目指すというプロジェクトであった。フレーゲは、こうした証明を、『基本法則』において自らが構成した概念記法の体系の中で遂行しよ

うとしたのである。

新しい算術体系を構成するというフレーゲ自身の試みは、ラッセルのパラドクスにより、失敗したと言える。しかし、これまでの議論から、次のことは言えるだろう。すなわち、フレーゲによる基数概念の分析が正しくあるための必要条件を、被分析項の意義と分析項の意義が同一であるという条件によって定める必要はない。また、その分析をもとに新しく算術の理論を構成し、その構成に成功するならば、フレーゲによる基数概念の分析が正しいことを示すことができる。こうして、意義の同一性テーゼは否定されることになり、また、フレーゲによる基数概念の分析が正しくあるための十分条件が定められることになる。以上が、意義の同一性テーゼへのフレーゲ的反論である。

そして、以上の議論から、フレーゲが行なった論理的分析がもつ重要な特徴を明らかにできる。最後にこのことを確認することにしたい。この議論の主要な戦略は、慣用となってきた被分析項の表現（例えば「0」）を、意義が明確に定義される表現によって置き換えて、新しく算術体系を構成してしまおう、というものである。こうした戦略をとるということは、分析というものを次のようなものとして捉えるということである。すなわち、分析をするということは、意義が明確に把握されていない被分析項の表現を、意義が明確に定義される表現によって置き換えて、被分析項が関係する理論体系を新しく構成することまで含むものである、と³⁴。フレーゲによる基数概念の分析は、まさに、こうした考え方のもとでなされていると言える。そして、理論体系を新しく構成することによって、分析対象となるものの分析を与えようとするという点において、フレーゲが行なった論理的分析は重要な特徴をもつと私は考える。

注

¹ Beaney (2004), Beaney (2005), Beaney (2007a), Beaney (2007c).

² 本稿では、「Sinn」の訳語としては「意義」を採用し、「Bedeutung」の訳語としては、飯田 (1987)に倣い、「イミ」を採用する。（『フレーゲ著作集』の訳では、「Sinn」は「意義」と訳されているが、「Bedeutung」は「意味」と訳されている。）「Bedeutung」の訳語として「イミ」を採用することの理由は、飯田と同じく、「意味」を一般的な名称として残し

ておくためである。

³ フレーゲは、「基数」という名称を、「*A*はいくつあるか」といった問いに答える際に用いられる0と正の整数の総称として用いている。GL, §4に付された脚注を参照されたい。

(本稿では、フレーゲの著作・論文を脚注で参照する際には、それらの著作名・論文名の略称を挙げることにする。本稿がフレーゲの著作・論文に採用する略称は、本稿の末尾に付した参考文献表に記載してある。そして、フレーゲの著作・論文から引用する際に参照するページ数は、原著書・原論文のものである。そのページ数に続けて、引用箇所の『フレーゲ著作集』におけるページ数も挙げている。)

⁴ GL, §3 を参照。

⁵ この点については、GL, §14 を参照されたい。

⁶ 本稿では、ある一群の言語表現を表すため的一般名「Satz」の訳語としては、「命題」・「文」という二つの語を使い分けることとする。

⁷ GL, §4.引用文内の一つ目の補足は私によるものであり、二つ目の補足は、『フレーゲ著作集 2 算術の基礎』のこの箇所の訳者である三平正明氏・野本和幸氏によるものである。なお、フレーゲの著作・論文からの引用の訳は、勁草書房から出版されている『フレーゲ著作集』における邦訳をほぼそのまま使わせていただいたが、フレーゲのテクニカルタームの訳語を『フレーゲ著作集』のものとは変えている場合には、その都度断りを入れてある。

⁸ GL, §68, §74.定義 (Z) の中で用いられている「Begriff」という語は、フレーゲのテクニカルタームとしての意味合いが強い。しかし、『基礎』においてフレーゲは、テクニカルタームとしてのこの語が何を表すのかをはっきり説明してはいない。この説明がなされ、「Begriff」という語が明示的にテクニカルタームとして用いられるのは、『基礎』の出版後に発表された論文・著作においてである。そこでの説明によれば、フレーゲにとって**概念**とは、関数の一種である。より詳しく言えば、**概念**とは、ある項 (Argument) をとって真理値を返すような関数である。

本稿では、日常的な意味合いをもつ語としては「概念」を用い、フレーゲのテクニカルタームとしては**概念**を用いることにする。こうした使い分けは、『フレーゲ著作集』の邦訳においてはなされていないことに注意されたい。こうした使い分けに関する責任は私にある。

⁹ ここで言う「もの」が表す存在者の中には、**概念**も含まれる。**概念**がもつような性質のことを、「2階の**概念**」と呼ぶことができるだろう。

¹⁰ ここで私は、**概念**の外延のことをクラス（集まり）として説明している。しかし、こうした説明は分かりやすさのためやむなく用いたものであることに注意されたい。フレーゲが用いた「**概念**の外延」という理論的概念は、集合論における「集合」「クラス」と

といった理論的概念とは本来は区別されるべきものである。

¹¹ 概念 X は概念 Y と等数である、という関係 (Beziehung) (二つの概念の間に成り立つ関係) もまた、『基礎』の中でフレーゲによって定義されているものである。

¹² パラドクスの以下の定式化は、Beaney (2005, p.289)に負うが、ビーニーは例を用いて定式化してはいない。その代わり、以下の例は、Beaney (2007c, §2, §6) に挙げられているものを用いた。また、パラドクスがもつ前提の明示化は、私自身によるものである。

¹³ SB, pp.26-27, 邦訳 72-73 頁。

¹⁴ 意義とイミの区別によるパラドクスへの応答のアイデアは、Beaney (2005)に負うものである。また、以下の応答には、ビーニーの論述をそのまま用いた箇所と私が再構成・補足した箇所が含まれる。以下の応答の部分が、ビーニーの論述をそのまま用いた箇所になっているときは、その都度指摘することにする。

¹⁵ こうした見解は Beaney (2005, p.289, p.295) に負う。

¹⁶ この指摘はビーニーによるものであり、こうした指摘は Beaney (2005, pp.295-301) 中に見られる。

¹⁷ 以下に述べる例はビーニーの挙げる例とは異なるものではあるが、そのアイデアはビーニーに負っている。Beaney (2005, pp.295-296) を参照されたい。

¹⁸ このテーゼは、Beaney (2005, pp.295-301) の中に明示的には現れてはいないものであり、私の補足によるものである。

¹⁹ LM, pp.224-229, 邦訳 225-232 頁。

²⁰ 「数学における論理」の中の、定義の本性についての考察が、意義の同一性テーゼへの反論としても見ることができるという点は、Beaney (2005, §4) から学んだものである。以下で、定義の本性についての考察の再構成を行なうが、その際にも Beaney (2005, §4) の論述を参考にしている。

²¹ このような定義の例としては、論理学の中で行われる、論理式の表記に関する定義

$$\exists !x\varphi x \Leftrightarrow \exists x (\varphi x \wedge \forall y (\varphi y \rightarrow x = y))$$

が挙げられる。右辺の論理式に付与される意味は、「与えられた対象領域の中に、 φx が成り立つような x がただ一つ存在する」というものである。この定義においては、これと同一の意味を付与されるものとして、省略表現である左辺の論理式が導入される。

²² LM, p.227, 邦訳 230 頁。

²³ LM, p.224, 邦訳 226 頁、pp.228-229, 邦訳 232 頁。

²⁴ LM, p.227, 邦訳 230 頁。

²⁵ LM, pp.226-228, 邦訳 229-232 頁。

²⁶ LM, pp.226-227, 邦訳 229 頁。

²⁷ LM, pp.227-228, 邦訳 230-231 頁。

²⁸ LM, p.228, 邦訳 231 頁。

²⁹ とはいって、フレーゲも述べているように、「0」を、定義の以前には何の意義ももたずそして定義によって新たに意義を与えられる記号とみなすならば、ここで「0」を新しく導入してもかまわないだろう。LM, p.228 (邦訳 231 頁) を参照されたい。

³⁰ LM, p.228, 邦訳 231-232 頁。

³¹ 「数学における論理」の中の論述からこのテーゼが引き出せることは、Dummett (1991, pp.17-18, p.51) から学んだ。ただし、ダメットは、上の引用箇所からこのテーゼが引き出せると明示的に述べているわけではないし、本稿が定式化したテーゼとまったく同じものを定式化しているわけでもない。

³² ある表現のイミがどのようにして与えられるかを説明するということが、その表現の意義を説明するということであると言えるだろう。表現「**概念**〈自己自身と同一でない〉」のイミ、言い換れば、表現「**概念**〈 $x \neq x$ 〉」のイミとは、自分自身と同一でないような対象を項としてとったときは真理値「真」を値としてとり、それ以外の対象を項としてとったときは真理値「偽」をとるような関数である。また、表現「**概念** X は**概念** Y と等数である」のイミとは、互いに一対一対応がつけられるような二つの**概念**を項としてとったときは「真」を値としてとり、それ以外の場合は「偽」を値とするような関数である。

そして、表現「**概念** X の外延」のイミとは、要するに、任意の**概念** F を項としてとり、**概念** F に属するような対象すべてを、そしてそれのみを集めてできるクラスを値とするような関数である。先の脚注でも述べたように、ここで私は「クラス」という語を説明の便宜上用いていることに注意されたい。ところで、表現「**概念** X の外延」の意義を明確に把握し説明することは、フレーゲにとっての中心的課題であり、結局フレーゲが（あるいは他の誰かが）そのことに成功したと言えるのかどうかはそれ自体興味深い問題である。（この点については Burge (1984) を参照されたい。）そのため、先の私の説明によって、表現「**概念** X の外延」の意義が説明されたと簡単に結論してしまうことには実は問題がある。しかし、被分析項の置き換えを正当化するための現在の議論の妥当性はこの問題とは関係がないと言える。私はここでフレーゲの基数 0 の分析を単に例の一つとして用いただけである。

³³ 以下の議論は、基本的に、Beaney (2005, p.302-303) に見られる議論に負う。ただし、ビーニーは、そこで意義把握に関するテーゼを明示的に提示しているわけではない。

³⁴ ただし、分析に対するこうした捉え方には、次のような問題がある。それはすなわち、被分析項はそもそも明確な意義をもたないと考えるべきか、それとも、被分析項は明確

な意義をもつたが、われわれがその意義を十分に把握していないと考えるべきか、という問題である。しかし、この問題を本稿で検討することはできない。

参考文献

- Beaney, Michael (2004) "Carnap's Conception of Explication: From Frege to Husserl?" , in Awodey, S. and Kline, C., (eds.), *Carnap Brought Home*, Open Court, Chicago, pp.117-150.
- Beaney, Michael (2005) "Sinn, Bedeutung, and the Paradox of Analysis" , in Beaney, M. and Reck, Erich H., (eds.), *Gottlob Frege: Critical Assessments vol.4*, Routledge, London, pp.288-310.
- Beaney, Michael (2007a) "Conceptions of analysis in the early analytic and phenomenological traditions: some comparisons and relationships" , in Beaney (2007b).
- Beaney, Michael, (ed.) (2007b) *The Analytic Turn: analysis in early analytic philosophy and phenomenology*, Routledge, New York.
- Beaney, Michael (2007c) "Analysis", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2007 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2007/entries/analysis/>>.
- Burge, Tyler (1984) "Frege on Extensions of Concepts, From 1884 to 1903" , in Burge (2005, pp.273-298).
- Burge, Tyler (2005) *Truth, Thought, Reason: Essays on Frege*, Clarendon Press, Oxford.
- Carnap, Rudolf (1950) *Logical Foundations of Probability*, The University of Chicago Press, Chicago.
- Dummett, Michael (1981) *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Harvard University Press, Cambridge.
- Dummett, Michael (1991) *Frege and Other Philosophers*, Clarendon Press, Oxford.
- Frege, Gottlob (1879) *Begriffsschrift*, L. Nebert, Halle, in Angelelli, I., (ed.), *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Georg Olms, Hildesheim, 1977,
邦訳: 藤村龍雄訳, 『概念記法』, 藤村龍雄(編), 『フレーゲ著作集1 概念記法』, 勁草書房, 1999, 所収. BS
- Frege, Gottlob (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik*, W. Koebner, Breslau,
邦訳: 野本和幸・土屋俊(編), 三平正明・土屋俊・野本和幸訳, 『フレーゲ著作集2 算術の基礎』, 勁草書房, 2001. GL
- Frege, Gottlob (1891) *Funktion und Begriff*, H. Pohle, Jena, in Frege (1990),
邦訳: 野本和幸訳, 『関数と概念』, 黒田亘・野本和幸(編), 『フレー

- ゲ著作集4 哲学論集』,勁草書房, 1999, 所収. *FB*
- Frege, Gottlob (1892a) “Über Begriff und Gegenstand”, in Frege (1990),
 邦訳: 野本和幸訳、『概念と対象について』, 黒田亘・野本和幸(編), 『フレーゲ著作集4 哲学論集』, 勁草書房, 1999, 所収. *BG*
- Frege, Gottlob (1892b) “Über Sinn und Bedeutung”, in Frege (1990),
 邦訳: 土屋俊訳、『意義と意味について』, 黒田亘・野本和幸(編), 『フレーゲ著作集4 哲学論集』, 勁草書房, 1999, 所収. *SB*
- Frege, Gottlob (1893/1903) *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 vols., H. Pohle, Jena, 邦訳: 野本和幸(編), 金子洋之・野本和幸・横田榮一訳, 『フレーゲ著作集3 算術の基本法則』, 勁草書房, 2000. *GG*
- Frege, Gottlob (1906) “Einleitung in die Logik”, in Frege (1969),
 邦訳: 野本和幸訳, 『論理学入門』, 黒田亘・野本和幸(編), 『フレーゲ著作集4 哲学論集』, 勁草書房, 1999, 所収. *EL*
- Frege, Gottlob (1914) “Logik in der Mathematik”, in Frege (1969),
 邦訳: 田畠博敏訳, 「数学における論理」, 野本和幸・飯田隆(編), 『フレーゲ著作集5 数学論集』, 勁草書房, 2001, 所収. *LM*
- Frege, Gottlob (1918) “Der Gedanke—eine logische Untersuchung”, in Frege (1990), 邦訳: 野本和幸訳, 『思想——論理探究[I]』, 黒田亘・野本和幸(編), 『フレーゲ著作集4 哲学論集』, 勁草書房, 1999, 所収. *GE*
- Frege, Gottlob (1969) Hermes, H., Kambertel, F. and Kaulbach, F., (eds.), *Nachgelassene Schriften*, Felix Meiner, Hamburg.
- Frege, Gottlob (1990) Angelelli, I., (ed.), *Kleine Schriften*, Georg Olms, Hildesheim.
- 飯田隆 (1987) 『言語哲学大全I 論理と言語』, 勁草書房.
- Langford, C. H. (1942) “The Notion of Analysis in Moore's Philosophy”, in Schilpp, P. A., *The Philosophy of G. E. Moore*, Northwestern University, Chicago.
- Nelson, Michael (2008) “Frege and the Paradox of Analysis”, *Philosophical Studies*, 137, pp.159-181.
- Reck, Erich H. (2007) “Frege-Russell numbers: Analysis or explication?”, in Beaney (2007b).
- 三平正明 (2000) 「フレーゲとベナセラフ: 数とは何かを巡って」, 『科学哲学』33-2, pp.147-161.
- Shieh, Sanford (2008) “Frege on Definitions”, *Philosophy Compass*, 3, pp.992-1012.
- Weiner, Joan (1984) “The Philosopher behind the Last Logicist”, in Wright, C., (ed.), *Frege: Tradition & Influence*, Basil Blackwell, Oxford, 1984.
- Weiner, Joan (1990) *Frege in Perspective*, Cornell University Press, Ithaca.

(たかはし ゆうた／慶應義塾大学)