哲学の探求　第35号　哲学若手研究者フォーラム　2008年5月（97-104）

曖昧さ：真理値の確定性、境界不在性と縮約規則

矢田部　俊介

1 はじめに

R. M. Sainsburyは、曖昧性に関して、以下のように主張している[Sa90]。すなわち、集合を使用して述語を定義することとは、述語の外延である集合の内部と外部の間に、**鮮明な境界線**を引くことである。また、多値論理上で述語を定義する試みは、結局鮮明な境界線を（真理値の個数－1 本だけ）複数引くことである。しかし、曖昧な述語は**境界不在性**を持つので、曖昧な述語は集合では定義できない。このように、彼は集合論では本質的に境界不在な曖昧性という概念を扱えず、我々は真の曖昧性を扱うために別の枠組みを探さなければならないと論じる。

彼の反論は非常に有名なものであり、多くの人の共感を呼んだが、一方で、境界不在な概念とはどういうものかに関する突っ込んだ議論はなされず、その具体像を誰も知らない。我々は、境界不在な概念を、その外延に関する集合論的な分析を行うことによって、特徴づけることを試みたい。

その分析の過程において、非古典論理の集合論で、彼の主張に反するような現象が散見される。この小論では、それらの現象のうち一つを紹介し、それによって彼の主張の問題点を指摘したい。すなわち、「鮮明な境界線」は、集合を使用して述語を定義するからもたらされるのではなく、古典論理が含む論理法則（**縮約規則**）によってもたらされる、と論じうる。この点において、Sainsburyの主張は論理に関する誤解に根ざしており、正当化できないと思われる。

2 「曖昧さ」と砂山のパラドックス

「曖昧な表現」として、小論では外延の境界が曖昧な述語（「大きい」「多い」

「赤い」など）を考察する。もちろん、指示対象が一意に決まらない表現、文脈依存度が高い表現、同音異義語なども「曖昧性」と呼ばれうるが、ここでは取り上げない。

なぜ曖昧さに意味論を与えるのが難しいのかの一例として、**砂山のパラドクス**(the Sorites Paradox)を考えてみよう。

(*) 0 本しか髪の毛を持たない人はハゲである。
(+) n 本しか髪の毛を持たない人がハゲであれば、$n+1$ 本しか持たない人もハゲである。
(−) 百万本髪の毛がある人はさすがにハゲではない。

一見、どれも非常に確からしく見えるが、古典論理の下では、上の 3 原則は矛盾を導く。すなわち、「n 本しか髪の毛を持たない人がハゲである」を表す述語を **Bald**(x)とすると、(*)から **Bald**(0)が成立し、(+)こと$(\forall x)$**Bald**(x) → **Bald**(x+1)を百万回適用すれば、**Bald**(10,000,000)が成立するが、これは(−)に反する。

この矛盾を解決するために取られる立場の一つとして、「認識説」がある。この立場では、述語 **Bald**(x)は、誰も知らないが実は**鮮明な境界線**(sharp boundary)を持っていると考える。例えば「5 万本以下はハゲ」という境界線を持つと考えよう。この場合、原則(+)が成立しない。ここで問題となるのは、髪の毛 5 万本（ハゲである）と 50,001 本（ハゲでない）の間に決定的な違いがあることになるが、その理由が説明できないことである。

この問題は、多値論理を導入して、例えば領域を 2 つではなく 3 つに分解することにしても変わらない。すなわち、3 値論理を導入し

- 「確定的にハゲ」: 3 万本以下しか髪の毛を持たない人
- 「確定的にフサフサ」: 8 万本以上髪の毛がある人
- 「境界例」: 30,001 本〜79,999 本の髪の毛がある人

と分割しよう。この場合も、「境界例」の外延は鮮明な境界線を持つ。すなわち、3 万本と 30,001 本の間に決定的な違いがある。

というわけで、R. M. Sainsbury は、「曖昧な述語（「ハゲである」）は**境界不在**

性を持つ（boundary-less である）」と主張した。すなわち、曖昧な概念とは、その概念に含まれる事物と含まれない事物の間にいかなる境界線もなく、またその概念に**確定的に含まれる**事物とそうでない事物との間にいかなる境界線もないような、そういう**境界不在な**概念のことだとした。さて、「ハゲである」とは曖昧な概念であるから、境界不在であるはずである。従って、5 万本と 5 万 1 本、また 3 万本と 3 万 1 本の間に本質的な違いがあってはならない。

2.1 述語を集合によって定義する

引き続き Sainsbury の説を見てみよう。彼によれば、集合によって述語を定義するとは、**境界線を引く**ということである[Sa90]。

> Sets has sharp boundaries... either the object quite **definitely** belongs to the set or else it quite **definitely** does not.

以上は、集合論を展開する論理が古典論理の場合は明らかに正しいであろう。

それでは、多値論理の代表的存在であるファジイ論理の場合はどうだろうか。任意の集合 a, b について、ファジイ論理上の集合論では $a \in b$ の真理値は、[0,1] の実数値として確定的に定まる。すなわち、ファジイ論理上の集合論では、任意の実数（例えば 0.6）について、「真理値 0.6 の境界線」という鮮明な境界線を持つということになる。この意味において、ファジイ論理においても、集合は鮮明な境界線を持つ、と Sainsbury は論じている。

Sainsbury は古典論理／ファジイ論理だけを論じ、それ以外の論理を取り上げていない。従って、この二つのケースだけで十分な論証となっているかが疑問として残る。この小論では、これから古典論理／ファジイ論理の両方よりも証明力の弱い、縮約規則がない論理 Contraction-Free Logics (**CFL**)を取り上げ、Sainsbury 説を検討する。

2.2 なぜ縮約規則に注目するのか

縮約規則とは、古典論理上の推論規則の一つであり、そのバージョンの一つの左縮約規則は、以下のように書くことができる。

縮約規則：

$$\frac{A, A \vdash B}{A \vdash B}$$

さて、古典論理から縮約規則を除去した部分体系こと「縮約規則がない論理 Contraction-Free Logics(**CFL**)」について、以下の結果が知られている。

1. **CFL** 上では、Sorites paradox は矛盾を導かない[Cop97]。

2. **CFL** は、古典論理・ファジイ論理両者の部分論理である。グリシン論理は、古典論理から縮約規則のみを除去した **CFL** の一つであり、そのためグリシン論理はファジイ・古典論理上を分析するための共通基盤となりうる。

以上の論理間の関係を図に書くと以下のようになる。

述語論理	グリシン論理 $\xrightarrow{\subset}$	ファジイ論理 $\xrightarrow{\subset}$	古典論理
縮約規則	なし	断片	あり

2.3 包括原理

さて、今度はグリシン論理上の集合論を考える必要がある。どのような集合の存在保証原理を仮定したら良いだろうか。

包括原理は、任意の formula φ に対して、$\{x : \varphi(x)\}$ という集合の存在を保証する強力な集合の存在保証原理である。よく知られているように、古典論理ではラッセルのパラドックスを起こす。しかし、**CFL** においては、包括原理は矛盾を導かない(Grišin[Gri82])。この小論では、グリシン論理上で包括原理のある集合論を枠組みとして採用する（詳細については[Can03]を参考にされたい)。包括原理が古典論理上で採用されない唯一の理由は「矛盾するから」である。しかしグリシン論理においては、包括原理が矛盾を導かないため、問題は全くない。また、この集合論は表現力が豊かで、後述するように**自己言及的な集合の定義**も可能にする。以上の点で、**CFL** における集合の典型的な特徴を兼ね備えているからである。

さて、グリシン論理上、包括原理によって何が可能になるのだろうか。まず、自然数の集合などを定義することができる。さらに、集合の**循環的定義**が可能であることが、以下の定理から分かる。

定理 2.1（再帰定理（一般化された再帰的定義）） 任意の論理式 $\varphi(x, \cdots, y)$にたいして、特殊なターム θを定義できる。これは以下を満たす。

$$(\forall x)x \in \theta \leftrightarrow \varphi(x, \cdots, \theta)$$

つまり自分自身をパラメーターとして論理式で定義される集合を定義できる。

証明は[Can03]を参照してほしい。この定理により、自然数上で再帰的に定義される関数のグラフを全て定義することができ、従ってある程度強い算術が展開可能である。しかし、例えば足し算のグラフを定義した際、関数「足し算」が全域的に関数として定義できるのかどうかなどは、未だ不明である。

2.4 砂山のパラドックスを表現する集合 θの定義と、縮約規則の役割

さて、一般化された再帰的定義により、古典論理上で定義不可能と思われていたような多くの集合を定義することが可能になる。例えば、砂山のパラドックスを表現する集合 $\theta \subset \omega$ は、再帰定理により以下のように定義できる。

$$1 \in \theta \Leftrightarrow 0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta,$$
$$n+1 \in \theta \Leftrightarrow n \in \omega \otimes n \in \theta$$

ただし$\otimes$は and の、$\oplus$は or の、multiplicative な表現である。また $\mathbf{M}$ は 1,000,000 の略記とする。この集合は以下を満たす。

(1) $0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta \vdash 1 \in \theta,$

(2) $1 \in \theta \vdash 2 \in \theta, \cdots, 999, 999 \in \theta \vdash \mathbf{M} \in \theta.$

つまり以下が成立する。

$$0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta \vdash \mathbf{M} \in \theta$$

注意だが、$0{\in}\theta \otimes \mathbf{M}{\notin}\theta \vdash \mathbf{M}{\in}\theta$は決して矛盾ではない。矛盾を起こすためには、もう一つ$\mathbf{M}{\notin}\theta$が左辺に必要である。

$$\dfrac{\dfrac{0\in\theta,\ \mathbf{M}\notin\theta \vdash \mathbf{M}\in\theta}{0\in\theta,\ \mathbf{M}\notin\theta,\ \mathbf{M}\notin\theta \vdash \mathbf{M}\in\theta \otimes \mathbf{M}\notin\theta}}{0\in\theta,\ \mathbf{M}\notin\theta,\ \mathbf{M}\notin\theta \vdash \bot}$$

では、縮約規則によって、どのように矛盾が導出されるかを調べてみよう。まず、$0{\in}\theta \otimes \mathbf{M}{\notin}\theta$は無矛盾だが、$0{\in}\theta \otimes \mathbf{M}{\notin}\theta \otimes \mathbf{M}{\notin}\theta$は矛盾を起こす。次に、$n{\notin}\theta$の形の文に縮約規則が成立すると仮定する。このとき

$$\dfrac{0\in\theta,\ \mathbf{M}\notin\theta,\ \mathbf{M}\notin\theta \vdash \bot}{0\in\theta,\ \mathbf{M}\notin\theta \vdash \bot}\ \text{縮約規則}$$

つまり$0{\in}\theta \otimes \mathbf{M}{\notin}\theta$という Sorites Paradox の前提条件はそのまま矛盾を生む、ということになってしまう。このように、砂山のパラドックスにおいて、**矛盾は縮約規則によって導かれる**[Cop97]。

2.5 集合θと$x{\in}\theta$の形の文の真理値

さて、Sainsbury は集合の境界線について、真理という視点から語っていた。従って、我々もθの membership について、Sainsbury のように真理の確定性について語りたい。そのような場合、本来ならその意味論に移行するのだが、**CFL** の意味論は代数的に構成され、その値の意味を解釈することは困難である。そのためグリシン論理上の集合論の内部で以下のような述語Tを構成する。

- 有限言語 L は$0{\in}\theta \otimes \mathbf{M}{\notin}\theta, 1{\in}\theta, \cdots, \mathbf{M}{\in}\theta$の百万個の文のみからなる。
- 簡略化のため文$0{\in}\theta \otimes \mathbf{M}{\notin}\theta$の名前を 0、$i{\in}\theta$の名前を$i$とする（文$P$の名前を$\ulcorner P \urcorner$と書く）。
- 包括原理によって、任意の L の文Pについて以下を満たす述語$T(x)$を構成できる。

$$\vdash T(\ulcorner P \urcorner) \equiv P \cdots (**)$$

(**) は Tarski の T-scheme であり、従って Tを言語 L の真理述語であると呼べる。

このとき、θ の membership について、以下が言える。

(1) 約 1,000,000 step の推論により以下が結論される。

$$\boxed{T(\ulcorner 0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta \urcorner) \vdash T(\ulcorner \mathbf{M} \in \theta \urcorner)}$$

(2) 文 $0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta$が真であるとき、同時に文 $\mathbf{M} \in \theta$が真であるとも、文 $\mathbf{M} \notin \theta$が真であるとも言うことができない。

(a) $T(\ulcorner 0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta \urcorner),\ T(\ulcorner \mathbf{M} \notin \theta \urcorner) \vdash \perp$
(b) $T(\ulcorner 0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta \urcorner),\ T(\ulcorner \mathbf{M} \in \theta \urcorner) \vdash \perp$

(a) の証明は $0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta, \mathbf{M} \notin \theta \vdash \perp$ より明らか。

(3) 以上は、証明 step がたつと文 $\mathbf{M} \in \theta$ の真理述語による表現が変化することを示す。

(a) (2a)(2b)の右辺 $T(\ulcorner 0 \in \theta \otimes \mathbf{M} \notin \theta \urcorner)$ が成立しているときは、$\mathbf{M} \in \theta$ と $\mathbf{M} \notin \theta$ の真理は共に**不確定**(indeterminate) であり、

(b) 約 1,000,000 証明 step 後には、$T(\mathbf{M} \in \theta)$ が成立する。

以上のような真理述語の意味において、縮約規則無しの論理では θ の membership に関する文 $x \in \theta$ の真偽が不確定であると見なすこともできる。

この場合、計算機科学における依存型理論(dependent type theory)の語法を借りて、$x \in \theta$ の文の真偽に関する判断は証明ステップが経つと変化する、と言うことが可能かもしれない。その場合、縮約規則なしでは、θ や R のような集合の持つ境界線は**不安定**で**文 $x \in \theta$ の真偽に関する判断が証明ステップごとに変化**していくものとなる。

4 結論：Sainsburyに対する反論

R. M. Sainsburyは、集合によって述語を定義するとは、鮮明な境界線を描き、その内部と外部を区別することであると断じた。しかし、「鮮明な境界線」とは、集合だから持つのではなく、古典論理が含む論理法則（**縮約規則**）によってもたらされる。縮約規則なしでは、集合の持つ境界線は**不安定**であり、証明ステップごとに構成要素の真理値に関する判断が変化していくものとなる。

参考文献

[Can03] Cantini, A. 2003. "The undecidability of Grišin's set theory", *Studia logica* 74, pp. 345-368.

[Cop97] Copeland, B. J. 1997. "Vague Identity and Fuzzy Logic", *The Journal of Philosophy* 94(10), pp. 514-534.

[Gri82] Grišin, V. N. 1982. "Predicate and set-theoretic caliculi based on logic without contractions", *Math. USSR Izvestija* 18, pp. 41-59.

[Ha05] Hajek, P. 2005. "On arithmetic in the Cantor-Łukasiewicz fuzzy set theory", *Archive for Mathematical Logic* 44(6), pp. 763-782.

[HH03] Hajek, P. and Hanikova, Z. 2003. "A development of set theory in fuzzy logic", in M. Fitting, et al. (eds.), *Theory and applications of multiple-valued logic*, Heidelberg: Physica Verlag, pp. 273-285.

[Sa90] Sainsbury, R.M. 1990. "Concepts without boundaries", in R. Keefe et. al. (eds.), *Vagueness: a reader*, Cambridge, Mass.: MIT press, pp. 251-264.

（やたべ　しゅんすけ／産業技術総合研究所）

shunsuke.yatabe@aist.go.jp